陈杰诚

实变函数
授课提纲

陈杰诚

（2018 年秋冬学期）

第一次讲座：

“浅谈实分析”

说明：在这个讲座中，我们将主要介绍主讲人多年来对大学数学课程的一点理解，根据自己的理解，从不同的角度谈谈对大学数学课程体系的一种看法，以及实变函数课程（包括实分析课程---抽象测度与积分理论）在其中的定位。这个讲座只是参考性的，具体 ppt 文档另文处理（见附件材料）。

集合与欧氏点集初步

授课说明：

“集合与欧氏点集初步”分两部分讲授，第一部分是“集合论初步”，第二部分是“欧氏点集初步”。由于我们的授课对象主要是师范生，今后大多数是当中小学或大学老师的，要面对学生，他们对概念务必要清晰，对学生讲多少可以根据实际情况做出各种取舍，但自己必须要清楚。

第一部分主要按两条主线进行，一是集合的概念与基本性质，二是集合的势及其基本性质。由于集合的概念与基本性质在此前很多数学课程中都已经在使用，所以也都或多或少有介绍，但基本上没有一门课程会把集合的概念讲清楚，因为集合论不是它的主要内容。所以本课程将重点介绍集合的定义，也就是公理体系，以及与之相关的一定概念，至于集合的基本性质，由于大多数都学过，我们就不多进行论证了。所以我们一开始先做一个**讲座“浅谈集合的概念”**（同时给学生推荐一些参考资料作为课外自学用）。至于集合的势，我们除了介绍势的概念与一般性质外，重点在于介绍三个势：有限势、阿列夫零（即可数无穷集的势）、阿列夫（即连续统的势）。

第二部分主要从欧氏空间的拓扑结构入手，以实数系的理论体系为主线进行介绍，以便推广整套理论到一般的拓扑空间等几何体上去。为此，我们先以**讲座“浅谈实数系及其推广”**（同时给学生推荐一些参考资料作为课外自学用）的方式对实数系的理论体系做了介绍（这也是一般数学分析书或微积分书不详细介绍但又很基础的部分）。

授课内容清单：

第一部分 集合初步

讲座“浅谈集合的概念”

（一） 集合及其运算

I. 集合及其运算的有关概念
   1. 康托尔朴素集合论的基本原则
   2. 集合及其运算的若干基本概念

II. 集合及其运算的若干基本性质
   1. 有关交、并、差运算
   2. $\sigma-$代数
   3. 集列的极限

（二） 映射与集合的基数

I. 映射及其基本性质
   1. 映射
   2. 性质

II. 集合的势
   1. 集合的势
   2. 若干特殊的势
   3. 势的基本性质
   4. 势的进一步运算简介

第二部分 欧氏点集初步

讲座“浅谈实数系及其推广”

1. 度量结构
2. 拓扑结构及相关概念与性质
3. 极限点及相关概念与性质
4. 紧集及相关概念与性质
5. Borel 集与连续函数

第一部分　　集合初步

集合的概念在古代数学中就一直在使用，但作为一种抽象的理论单独加以研究则主要开始于十九世纪德国数学家康托尔（Cantor, 1845-1918）于 1874-1897 年间的工作，这些工作形成了目前常说的康托尔朴素集合论。

后来人们发现康托尔集合论的基本原理不完善，逐将康托尔的朴素集合论加以公理化。第一个公理化系统是由策梅洛（Zermelo，1871-1953）于 1908 年提出、并于 1922 年经弗兰克尔（Fraenkel）改进，通过对集合的定义加以适当限制，形成了今天常用的策梅洛-弗兰克尔公理体系。

我们将先做一个讲座“集合论基础”，简要介绍了康托尔朴素集合论与集合论的策梅洛-弗兰克尔公理体系。为表述简单起见，在本课程中我们仍将采用康托尔朴素集合论的术语与记号。

第二次讲座：
“浅谈集合的概念”

说明：在这个讲座中，我们将主要介绍康托尔的朴素集合论基本原理与集合论的蔡梅洛-弗兰克尔公理体系。虽然，从中小学开始，许多数学课程都用到集合的概念与性质，但对于集合的定义都没有完整的介绍。通过这个讲座，期望学生对集合的概念有个清晰的了解，也对后续介绍集合的性质，特别是集合的势，做好必要的准备。这个讲座也是参考性质的，有单独 ppt 文档（参见附件材料）。

(一)　集合及其运算

I.　集合及其运算的有关概念

1. 康托尔朴素集合论的基本原则

A. 外延原则：

集合 A=B 当且仅当 $\forall x$， $x \in A \Leftrightarrow x \in B$。

B. 概括原则：

任给一个性质 P，存在一个集合 A，它的元素恰好是具有性质 P 的那些对象全体，即 $A = \{x \mid P(x)\}$。

C. 选择原则：

任给一族互不相交的非空集合$\mathscr{A}$，都存在一个集合C，它恰好由$\mathscr{A}$中每个集合的一个元素所组成。

D. 备注：

- **外延原则**是说：一个集合由它的元素唯一决定；一组元素决定一个集合，而不是多个集合，比如{1，2}与{1，2，1}是相同的。(注意：这里使用的1、2是后面要定义的自然数，尽管此前尚未定义，但这里只是用来举例说明而已。) 外延原则给出了两个集合相等的定义。
- **选择原则**是说：给定了一组互不相交的非空集，可同时在每个集合中取一个元素。选择公理有多种表述形式与多种等价刻画方式，把它作为集合论的一个基本原则是由策梅洛于1904年提出的。

  提示：康托尔集合论基本原则中第三条应该是“集合基数的可比较原则”而不是选择原则，后来人们发现这两者是等价的，但选择原则表述简单。
- **概括原则**则给出了集合的一种定义，但这个定义太泛了以致于朴素集合论出了问题。康托尔集合论悖论举例（罗素悖论，1902年）：

  令$T=\{x\,|\,x\notin x\}$，问：$T\in T$？这个悖论说明，康托尔的集合定义规范（或者说基本原则）不完善，$T=\{x\,|\,x\notin x\}$不应该为集合。
- **关于概括原则的进一步说明：**

  (a) 在“浅谈集合论”讲座中介绍的ZFC公理体系与康托尔集合论的主要区别在于：对康托尔集合论的概括原则的使用加以限制，一方面对集合与其元素加以层次区别，另方面规定只有四种用概括原则定义的对象（空集、无序对集合、并集、幂集）才被直接认同为集合，同时认定归纳集合

  （即满足$(\varnothing\in\mathscr{A})\wedge(\forall C\in\mathscr{A}\to C\cup\{C\}\in\mathscr{A})$的集合$\mathscr{A}$）

  的存在性，其它的对象只有当它满足替换公理时才被认同为集合。

  (b) 简单地说，在ZFC公理体系中，若$P(x)$为性质，则$S=\{x:P(x)\}$一般说来不一定是一个集合（根据康托尔集合论，它是一个集合），但如果能找到一个集合X，使得

  $$S=\{x\,|\,x\in X\wedge P(x)\},$$

  则S就是一个集合了。
- **关于选择公理的进一步说明：**选择公理有下述多种等价刻画方式（仅让学生有个了解）

  (a) **Zermelo选择公理：**

  - **康托尔表示形式**（集合基数的可比较原则）：对任意两个集合A、B，要么$\overline{\overline{A}}\le\overline{\overline{B}}$，要么$\overline{\overline{B}}\le\overline{\overline{A}}$。

- **蔡梅罗表示形式：** 任给一族非空集合 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，都存在一个映射 $f:\Lambda\to A$，使得 $f(\alpha)\in A_\alpha\ \ (\forall\alpha\in\Lambda)$，其中 $A=\cup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$。
  备注：上述 f 通常被称为选择函数。
- **罗素表示形式：** 任给一族互不相交的非空集合 $\mathscr{A}$，都存在一个集合 C，它恰好由 $\mathscr{A}$ 中每个集合的一个元素所组成。

(b) **Hausdorff 极大原理：** 每个非空偏序集都有一个极大全序子集。

(c) **Zorn 引理：** 每个全序子集都有上界的非空偏序集必有极大元。

(d) **Zermelo 良序定理：** 每个集上都存在良序。

(e) **超限归纳法：** 一个关于序数的命题 $A(\alpha)$，如果 $A(0)$ 成立，且对任意 $\beta<\alpha$ $A(\beta)$ 都成立就可导出 $A(\alpha)$ 成立，则 $A(\alpha)$ 对一切序数 α 都成立。

2. 集合及其运算的若干基本概念

根据外延原则与概括原则可定义空集、子集、无序对集合、单元集、并集、差集、幂集、有序对、有限个集合的积集；根据选择原则可定义无穷个集合的积集，等等。

A 子集合

a) **子集：** $A\subset B\leftrightarrow[\forall x(x\in A\to x\in B)]$。注：包含关系、真子集。

b) **集合相等：** $A=B\leftrightarrow[\forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B)]$。注：$\{1,2\}$与$\{1,2,1\}$是同一个集合。

c) **例子：**

- R^1、**R**、**Q**、**Z**、**N**、**C**。
- $A=\{r,s,t\}$ 中三个元素互不相同，$B=\{r^2,s^2,t^2\}$，$C=\{rs,st,tr\}$，则 $A=B=C$ 当且仅当 $\{r,s,t\}=\{1,w,w^2\}$ 其中 $w=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$。

证明： 设 $K=r+s+t=r^2+s^2+t^2=rs+st+tr$，则

$$K^2=(r+s+t)^2=(r^2+s^2+t^2)+2(rs+st+tr)=3K,$$

从而 K=3 或 0。若 K=3，注意到 $rst=r^2s^2t^2$ 意味着 $rst=1$（或 0，讨论省略），则 r,s,t 为下述方程的根

$$0=x^3-(r+s+t)x^2+(rs+st+tr)x-rst=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3,$$

但此时有 $r=s=t=1$，不合题意。因此只能是 K=0，此时，同理有 $rst=1$（或 0，讨论省略），而 r,s,t 为下述方程的根

$$0=x^3-(r+s+t)x^2+(rs+st+tr)x-rst=x^3-1,$$

即 $x=1$ 与 $x=(-1\pm\sqrt{3}i)/2$。

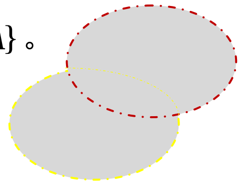
B 五种特殊集合：

a. **空集：** $\varnothing:=\{x\,|\,x\neq x\}$。根据外延公理，空集是唯一的，且是任何集合的子

集。

b. **无序对集合**：任给 x,y，$\{x,y\}:=\{z\mid z=x\vee z=y\}$。

c. **并集合**：任给一族集合 $\mathscr{A}$，$\cup\mathscr{A}:=\{z\mid\exists A\in\mathscr{A},s.t.z\in A\}$。



注：符号 $\cup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$、图示 $A\cup B$，集合族 $\mathscr{A}=\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$。

d. **幂集合**：任给一个集合 A，$\mathscr{P}(A):=\{B\mid B\subset A\}$。

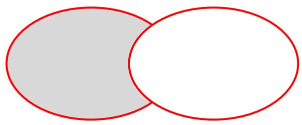
e. **归纳集**：满足 $(\varnothing\in\mathscr{A})\wedge(\forall C\in\mathscr{A}\to C\cup\{C\}\in\mathscr{A})$ 的集合 $\mathscr{A}$。

注：

- 归纳集的定义实际上涉及后面定义的“后续集”概念。
- 归纳集也定义为：$\mathscr{A}$ 为一非空集族，且 $\forall A\in\mathscr{A}$，$A^+=A\cup\{A\}\in\mathscr{A}$。
- 自然数集 $\mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$ 为一归纳集，其中 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots\}$ 而
  $0=\varnothing$，$1=\{\varnothing\}$，$2=\{\varnothing,1\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，$3=\{\varnothing,1,2\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$，…

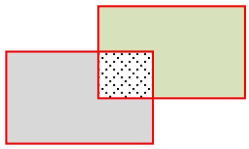
C 几种引申定义的集合

a. **单元集**：$\{x\}:=\{x,x\}$。



b. **有序对**：$\langle x,y\rangle:=\{\{x\},\{x,y\}\}$。

注：$\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle\Longleftrightarrow x=u\wedge y=v$。符号：$(x,y)$。

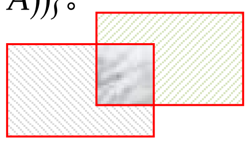


c. **差集**：$A-B:=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$。

- 图示、补集（余集）A^c、对称差集 $A\Delta B$ 图示。
- $A-B=A\cap B^c$。

d. **交集**：$\cap\mathscr{A}:=\{x\mid x\in\cup\mathscr{A}\wedge\forall A((A\in\mathscr{A})\to(x\in A))\}$。

注：符号 $\cap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$、图示 $A\cap B$。



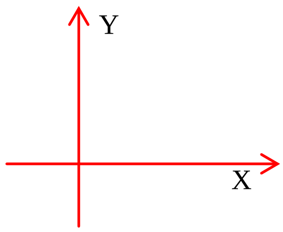
e. **后续集**：$X^+:=X\cup\{X\}$。

注：“后续集”也称“后继集”。

D 积集

a. 有限积：设 X,Y 都非空，形式上定义

$$X\times Y:=\{(x,y):x\in X,y\in Y\}。$$



注：见右图示。

- 它是一个集合，因为
  $X\times Y=\{(x,y):(x,y)\in\mathscr{P}(\mathscr{P}(X\cup Y)),x\in X,y\in Y\}$。
- 它可等价地定义如下：记

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x_1 : x_1 = (x,1) \in \mathcal{PP}(X \cup \{1\}), x \in X\} \\ A_2 &= \{y_2 : y_2 = (y,2) \in \mathcal{PP}(Y \cup \{2\}), y \in Y\} \end{aligned},$$

则

$$\begin{aligned} X \times Y &= \{\{x_1, x_2\} : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2\} \\ &= \left\{ \{x_1, y_2\} : \begin{array}{l} \{x_1, y_2\} \in \mathcal{PP}(X \cup \{1\}) \cup \mathcal{PP}(Y \cup \{2\}); \\ x_1 = (x,1), x \in X; y_2 = (y,2), y \in Y \end{array} \right\} \end{aligned}。$$

b. 任意因子积集：设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$为一族非空集，定义积集

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \{\bar{x} : \bar{x} = \{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset \cup_{\beta\in\Lambda} X_\beta, x_\alpha \in X_\alpha (\forall \alpha \in \Lambda)\}$$

其中

$$X_\alpha = \{x_\alpha : x_\alpha = (x, \alpha) \in \mathcal{PP}\{X_\alpha \cup \{\alpha\}\} : x \in A_\alpha\}。$$

注：

- 定义的合理性：由于每个A_α的非空性意味着$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$为一族互不相交的非空集合，因此选择公理保证了$\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$为非空的。
- 我们常常把上述定义理解为下述习惯上容易接受的形式

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \{(a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} : a_\alpha \in A_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda\}。$$

$\forall \bar{x} \in \prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$，$\bar{x}$形式上可写成$\bar{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$，其中$x_\alpha$通常称为$\bar{x}$的第$\alpha$个坐标。这是我们习惯上常用的**笛卡尔的坐标表达方式**，但从严密性与简洁性上来说，应该使用下述**蔡梅洛的选择函数表达方式**。

c. 积集概念的选择函数表达形式：

首先注意到，坐标表达形式：

$x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 可等价地看成一个函数 $x : \Lambda \to \cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha : \alpha \mapsto x_\alpha$。

因此，设$\mathscr{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$为一族非空集，

$$\prod \mathscr{A} := \{f \in \mathcal{P}(\Lambda \times \cup \mathscr{A}) \mid f : \Lambda \to \cup \mathscr{A}, f(\alpha) \in A_\alpha (\forall \alpha \in \Lambda)\}。$$

d. **幂集**（A的B次幂集）：

A的B次幂定义为：

$$\begin{aligned} A^B &= \{f \mid f : B \to A\} \\ &= \{f \mid f \subset B \times A; \forall b \in B, f \cap \{(b,a) : a \in A\}\text{为单元集}\} \end{aligned}。$$

注：

- 若A, B都非空，人们常常简单地写

$$A^B := \prod_{b\in B} A_b\text{，其中 } A_b = A\ (\forall b\in B)\text{。}$$

➢ 若 $B\neq\varnothing$，约定 $\varnothing^B=\varnothing$。因为此时，$\forall b\in B$，使得

$$f\cap\{(b,a): a\in A\}\text{为单元集}$$

的 f 不存在。

➢ 若 $A\neq\varnothing$，约定 $A^{\varnothing}=\{\varnothing\}$；此外，$\varnothing^{\varnothing}=\{\varnothing\}$。因为此时，由于 B 为空集，所以空集在 $\left\{f \,\middle|\, f\subset B\times A; \forall b\in B, f\cap\{(b,a):a\in A\}\text{为单元集}\right\}$ 中。

e.　例子：

➢ $\{1,2\}^{\mathsf{N}} = \{(a_1,a_2,\cdots): a_k\in\{1,2\}(\forall k\geq 1)\}$

$$=\left\{f \,\middle|\, f\subset \boldsymbol{N}\times\{1,2\}; \forall k\in \boldsymbol{N}, f\cap\{(k,a):a\in\{1,2\}\}\text{为单元集}\right\}\text{。}$$

➢ $\mathsf{N}^{\{1,2\}} = \{(a_1,a_2): a_k\in\mathsf{N}(\forall k=1,2)\}$

$$=\left\{f \,\middle|\, f\subset \{1,2\}\times\boldsymbol{N}; \forall k\in \{1,2\}, f\cap\{(k,a):a\in\boldsymbol{N}\}\text{为单元集}\right\}\text{。}$$

➢ $\mathsf{R}^{\mathsf{N}} = \{(a_1,a_2,\cdots): a_k\in\mathsf{R}(\forall k\geq 1)\}$

$$=\left\{f \,\middle|\, f\subset \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{R}; \forall k\in \boldsymbol{N}, f\cap\{(k,a):a\in\boldsymbol{R}\}\text{为单元集}\right\}\text{。}$$

➢ 习惯上记 $\mathcal{P}(X)=2^X$，因为 $\mathcal{P}(X)\ni A\to f_A\in\{0,1\}^X$ 是双射，其中

$$f_A(x)=\begin{cases}1 & (\forall x\in A)\\ 0 & (\forall x\notin A)\end{cases}\text{。}$$

II.　集合及其运算的若干基本性质

设 $A,B,C,\cdots\subset X$。

1.　有关交、并、差运算

a. 交换律：$A\cup B=B\cup A$、$A\cap B=B\cap A$。

b. 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$、$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

c. 分配律：若 $\mathscr{C}\neq\varnothing$，则

$$A\cup(\cap_{C\in\mathscr{C}}C)=\cap_{C\in\mathscr{C}}(A\cup C)\text{、}A\cap(\cup_{C\in\mathscr{C}}C)=\cup_{C\in\mathscr{C}}(A\cap C)\text{；}$$

$$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)\text{。}$$

d. 德·摩根（De Morgan）公式：设 $\mathscr{A}\subset\mathcal{P}(X)$，我们有

$$C-\left(\cap_{A\in\mathscr{A}}A\right)=\cup_{A\in\mathscr{A}}(C-A)\text{，}\ C-\left(\cup_{A\in\mathscr{A}}A\right)=\cap_{A\in\mathscr{A}}(C-A)$$

注：等价形式 $\left(\cap_{A\in\mathscr{A}}A\right)^c=\cup_{A\in\mathscr{A}}A^c$，$\left(\cup_{A\in\mathscr{A}}A\right)^c=\cap_{A\in\mathscr{A}}A^c$。

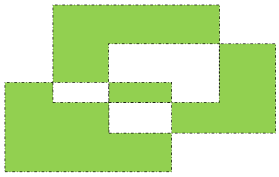
备注：

A. 有关对称差运算

a. 交换律：$A\Delta B = B\Delta A$

b. 结合律：$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

c. 分配律：$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$



d. $A\Delta\varnothing = A$、$A\Delta A=\varnothing$、$A\Delta A^c = X$、$A\Delta X = A^c$、$A\Delta B = A^c\Delta B^c$

e. $A\cup B=(A\Delta B)\cup(A\cap B)$

f. $A = A\Delta B$ 当且仅当 $B=\varnothing$

g. $\forall A,B$，$E\Delta A = B$ 当且仅当 $E = A\Delta B$

B. 几个例子:

a. $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)=$ {属于 A、B、C 中至少两个集合的元素全体}

b. $(A\cup B\cup C)-(A\Delta B\Delta C)=$ {属于 A、B、C 中刚好两个集合的元素全体}

c. $(A\Delta B\Delta C)-(A\cap B\cap C)=$ {属于 A、B、C 中刚好一个集合的元素全体}

d. $\forall E\subset X$，$E\cap A = E\cup B$，则 $A = X$、$B=\varnothing$。 注：$A=(A\cap C)\cup(A\cup C-C)$

e. $A = B$ 当且仅当 $\exists C\subset X$，s.t. $A\cap C = B\cap C$ 且 $A\cup C = B\cup C$。

2. $\sigma-$代数

设 $\mathscr{A},\mathscr{E}\subset\mathscr{P}(X)$，非空。

A. 定义：

- 若 $\mathscr{A}$ 关于可列并运算、取余运算封闭，则称 $\mathscr{A}$ 为 X 上的一个 σ-代数。
- 含 $\mathscr{E}$ 的最小的 σ-代数称为 X 上由 $\mathscr{E}$ 生成的 σ-代数，记为 $\sigma(\mathscr{E})$。
- Borel σ-代数 $\mathscr{B}_X$ 与一些相关概念：$\sigma(\tau_X)$，其中 τ_X 为 X 上的拓扑，X 为一拓扑空间，Borel 集、G_δ-型集、F_σ-型集等。

  注意：

  - $\mathscr{B}_X = \sigma$({X 中的闭集全体})。
  - σ-代数必含 Ø，X；
  - σ-代数定义中的“并”可等价地换成“交”。

B. 例子：

(1) X 上平凡的 σ-代数：{Ø，X}，$\mathscr{P}(X)$ ={X 的子集全体}。

(2) X 上可数或余可数集的 σ-代数：设 X 不可数，{E⊂X: E 或 E^c 至多可数}。

C. 性质：

$\mathscr{B}_{R^1}=\sigma(\mathscr{E}_j)$，其中

$\mathscr{E}_1=$ { R^1 上的有界开区间全体} 或{ R^1 上的有界闭区间全体}

$\mathscr{E}_2=$ { R^1 上的有界左开右闭区间全体}

或{ R^1 上的有界左闭右开区间全体}

$\mathscr{E}_3=\{$ R^1上的开左射线全体$\}$或$\{$ R^1上的闭左射线全体$\}$

$\mathscr{E}_4=$ $\{$ R^1上的开右射线全体$\}$或$\{$ R^1上的闭右射线全体$\}$

3. 集列的极限

设$\{A_k\}_{k\ge1}$为一列集合。

a. 单调集列的极限：

- 若$A_k\uparrow$，则定义$\lim_{k\to\infty}A_k=\cup_{k\ge1}A_k$。　　注：$\lim_{k\to\infty}[\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}]=(0,1)$。
- 若$A_k\downarrow$，则定义$\lim_{k\to\infty}A_k=\cap_{k\ge1}A_k$。　　注：$\lim_{k\to\infty}(-\frac{1}{k},1+\frac{1}{k})=[0,1]$。

b. 一般集列的极限：

- 上极限：$\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k=\lim_{k\to\infty}\cup_{n\ge k}A_n=\cap_{k\ge1}\cup_{n\ge k}A_n$。
  注：$\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k=\{x:x\text{属于无穷多个}A_k\}$。
- 下极限：$\underline{\lim}_{k\to\infty}A_k=\lim_{k\to\infty}\cap_{n\ge k}A_n=\cup_{k\ge1}\cap_{n\ge k}A_n$。
  注：$\underline{\lim}_{k\to\infty}A_k=\{x:\exists k_x\text{使得}\forall k\ge k_x\text{均有}x\in A_k\}$。
- 极限：若$\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k=\underline{\lim}_{k\to\infty}A_k$，则称之为$\{A_k\}_{k\ge1}$的极限集，记为$\lim_{k\to\infty}A_k$。
  注：　$E-\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k=\underline{\lim}_{k\to\infty}(E-A_k)$，
  　　　$E-\underline{\lim}_{k\to\infty}A_k=\overline{\lim}_{k\to\infty}(E-A_k)$。

c. 例子：

- $[n,+\infty)\xrightarrow{n\to\infty}\varnothing$；$[\frac{1}{k},1+\frac{1}{k})\xrightarrow{n\to\infty}(0,1]$。
- 设$A_k=\begin{cases}E & k\in\{1,3,5,\cdots\}\\ F & k\in\{2,4,6,\cdots\}\end{cases}$，则
  $$\overline{\lim}A_k=E\cup F,\quad \underline{\lim}A_k=E\cap F。$$
- 设函数列$f_k:R^1\to R^1$，$\{f_k\}\uparrow f$，则（讨论$\downarrow$）
  $$\{x:f(x)>t\}=\lim_{k\to\infty}\{x:f_k(x)>t\},$$
  $$\{x:f(x)\le t\}=\lim_{k\to\infty}\{x:f_k(x)\le t\}。$$
- 设函数列$f,f_k:R^1\to R^1$，则
  $$\{x:f_n(x)\text{不收敛于}f(x)\}=\cup_{k\ge1}\cap_{N\ge1}\cup_{n\ge N}\{x:|f_n(x)-f(x)|\ge\tfrac{1}{k}\},$$
  $$\{x:f_n(x)\text{发散}\}=\cup_{k\ge1}\cap_{N\ge1}\cup_{n,m\ge N}\{x:|f_n(x)-f_m(x)|\ge\tfrac{1}{k}\}。$$
- 思考：设函数列$f_k:R^1\to R^1$处处收敛于$f:R^1\to R^1$，考虑
  $\{x:f(x)\le t\}$、$\{x:f(x)<t\}$、$\{x:s\le f(x)\le t\}$，等。

(二)　映射与集合的基数

I.　映射及其基本性质

1.　映射

A. 映射： $f:A\to B$

注：

- 强调单值，原像、像
- 函数、特征函数、简单函数

B. 双射： 双射-------既单又满

单射-------若 $x_1 \neq x_2$，则 $f(x_1) \neq f(x_2)$

满射------- $f(A) = B$

注：双射又称为一一映射，它有**逆映射** $f^{-1}: B \to A$，**恒等映射**。

C. 复合映射：

$f: A \to B$，$g: B \to C$，则 $h(x) = g(f(x))$ 称为 g 与 f 的复合映射，通常记为 $g \circ f$。

2. 性质

A. 集合运算与映射之间的若干基本关系

- 设 X、Y 为两个非空集合，f 为 X 到 Y 的一个映射，若 $\{E\} \cup \{E_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 X 的一族子集而 $\{F\} \cup \{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 Y 的一族子集， 则有

$$\begin{aligned} & f\left(\cup_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha\right) = \cup_{\alpha\in\Lambda} f\left(E_\alpha\right), \\ & f\left(\cap_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha\right) \subset \cap_{\alpha\in\Lambda} f\left(E_\alpha\right), \\ & f\left(f^{-1}(F) \cap E\right) = F \cap f(E), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f^{-1}\left(\cup_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha\right) = \cup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}\left(F_\alpha\right), \\ & f^{-1}\left(\cap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha\right) = \cap_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}\left(F_\alpha\right), \\ & f^{-1}(F^c) = \left(f^{-1}(F)\right)^c. \end{aligned}$$

备注：若 f 为双射，则 $f\left(\cap_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha\right) = \cap_{\alpha\in\Lambda} f\left(E_\alpha\right)$。

- 关于特征函数，我们有

  - $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$，$\chi_{A\Delta B} = |\chi_A - \chi_B|$。
  - $\chi_A \equiv \chi_B$ iff $A = B$；$\chi_A \le \chi_B$ iff $A \subset B$。
  - $\chi_{\cup_\alpha A_\alpha} \equiv \max_\alpha \chi_{A_\alpha}$；$\chi_{\cap_\alpha A_\alpha} \equiv \min_\alpha \chi_{A_\alpha}$。
  - $\chi_{\overline{\lim} A_n} \equiv \overline{\lim} \chi_{A_n}$，$\chi_{\underline{\lim} A_n} \equiv \underline{\lim} \chi_{A_n}$。
  - $\lim A_n$ 收敛的充要条件为 $\lim \chi_{A_n}$ 处处收敛。

B. 单调映射的不动点

设 X 为一个非空集，且有 $f: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$。若对 X 中满足 $A \subset B$ 的任意 A、B，必有 $f(A) \subset f(B)$，则存在 $T \in \mathcal{P}(X)$，使得 $f(T) = T$。

证明提示：取 $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{P}(X): A \subset f(A)\}$，$T = \cup_{A\in\mathcal{S}} A \left(\in \mathcal{P}(X)\right)$。

II. 集合的势

1. 集合的势：

A. **集合对等：**若存在双射 $f:A\to B$，则称 A 与 B 对等，记为 $A\cong B$（或 $A\sim B$）。

备注：集合之间的对等关系是一种等价关系，满足自反性、对称性、传递性。

B. **集合的势：**凡是对等的集合我们称之为等势的（或者称之为有相同基数的）。

集合 A 的势（又称 A 的基数）用 $\overline{\overline{A}}$（或 $card(A)$）来表示。

C. **势的比较：**　若存在单射 $f:A\to B$，则记 $\overline{\overline{A}}\le\overline{\overline{B}}$；

若 $\overline{\overline{A}}\le\overline{\overline{B}}$ 且不存在双射 $f:A\to B$，则记 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$。

注：

- "$\overline{\overline{A}}\le\overline{\overline{B}}$"等价于"存在满射 $g:B\to A$"。
- "$\overline{\overline{A}}\le\overline{\overline{B}}$"也可写成"$\overline{\overline{B}}\ge\overline{\overline{A}}$"；类似地有"$\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$"。
- 若 $A\cap B=\varnothing$、$C\cap D=\varnothing$，而 $A\cong C$、$B\cong D$，则 $(A\cup B)\cong(C\cup D)$。

D. **备注**—关于集合势的说明

$\overline{\overline{A}}$ 到底是什么呢？$\overline{\overline{A}}$ 是一个集合，它有不同的理解方式：

- 在康托尔集合论的意义下，可把它理解为 $\overline{\overline{A}}=\{B:B\cong A\}$。但是，这个"集合"在 ZFC 公理体系下无法验证它是一个集合。
- 按照冯.诺意曼的定义，$\overline{\overline{A}}$ 是一个与 A 对等的基数，而
  - 基数是满足条件"$\forall\beta<\alpha$，β 与 α 不对等"的一个序数。
  - 序数是满足下述条件的集合 S：

    (α). $(S=\varnothing)\vee(\varnothing\in S)$；

    (β). $\forall x\forall y((x\in y)\wedge(y\in S)\to(x\in S))$；

    (χ). $\forall x\forall y((x\in S)\wedge(y\in S)\to(x=y)\vee(x\in y)\vee(y\in x))$；

    (δ). 在 S 中不存在无穷序列 $\{x_k\}_{k\ge1}$ 使得 $x_{k+1}\in x_k\ (\forall k\ge1)$。

    特别地，每个自然数都是序数，$\mathbf{N}$ 也是序数（常记为 ω 或 $\aleph_0$），它们同时也都是基数。但 ω 的后继序数 $\omega'=\omega\cup\{\omega\}$（常记为 $\omega+1$）不是基数。
  - 根据良序定理，与 A 对等的基数一定存在。

2. 若干特殊的势

A. 有限势：

$\overline{\overline{\varnothing}}$ 与 $\overline{\overline{\{1,2,\cdots,n_0\}}}$ 称有限势（也称有限基数），分别用 0 及 n_0 表示。若存在自然数 $n_0\in\mathbf{N}$，使得 $\{1,2,\cdots,n_0\}\cong A$，则称 A 为有限集，它刚好由 n_0 个互不相同的元素组成。所以，势的概念是集合元素个数概念的一种推广。

备注：

- 不是有限集的集合称为无穷集。
- 一个集合为无穷集的充要条件是它存在子集与 $\mathbf{N}$ 对等。
- 一个集合为无穷集的充要条件为它与自己的一个真子集对等。

B.　阿列夫零：

$\overline{\overline{\mathbf{N}}}$ 称为阿列夫零，通常用 $\aleph_0$ 来表示（也用 ω 来表示）。若 $\mathbf{N} \simeq A$，则称 A 为可数集（或称可列集）。

备注与例子：

- 与 $\mathbf{N}$ 不对等的无穷集合称为不可数集。
- $\mathbf{N} \simeq \{1,3,5,\cdots\} \simeq \mathbf{Z}$。　　备注：伽利略问题（1683 年）。
- 有时，人们把有限集与可数集统称为可数集，此时为区分无限集，常常用可数无穷集的术语。

C.　阿列夫

$\overline{\overline{\mathbf{R}}}$ 称为阿列夫（又称为连续基数），常用 c（或 $\aleph$）记之。若 $\mathbf{R} \simeq A$，则称 A 为连续统。

备注与例子：

- $(0,1]$ 为不可数集。
  证明提示：用对角线法与小数的十进位表示。
- $(0,1] \simeq (0,1) \simeq [0,1] \simeq \mathbf{R} \simeq \mathbf{R}-\mathbf{Q}$。
- 连续统假设：
  在 $\aleph_0$ 与 $\aleph$ 之间不存在其它基数。也就是说，连续统是最“小”的不可数集。

3. 势的基本性质

A. 康托尔定理：

对任一集合 A，A 与 $\mathcal{P}(A)$ 不对等。

备注：该定理说明，没有最大的基数。

证明概要（Cantor 对角线法）：

若 A 与 $\mathcal{P}(A)$ 对等，则存在双射 $\varphi: A \to \mathcal{P}(A)$，令 $A_0 = \{x \in A : x \notin \varphi(x)\}$，$x_0 = \varphi^{-1}(A_0)$，则由 $x_0 \in A_0$ 可推出 $x_0 \notin A_0$，由 $x_0 \notin A_0$ 可推出 $x_0 \in A_0$，无论哪种情形都矛盾。

康托尔悖论：

设 $\mathcal{A}$ 为所有集合组成的集合，则 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 应为 $\mathcal{A}$ 的子集，其元素应该不比 $\mathcal{A}$ 的元素“多”；但根据上述定理，$\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 的元素应比 $\mathcal{A}$ 的元素“多”。

B. 康托尔-伯恩斯坦三择一定理介绍：

设 A 与 B 为两个集合，则

(i) 要么 $\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}}$，要么 $\overline{\overline{A}} \ge \overline{\overline{B}}$，两者必居其一。

(ii) 若 $\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}}$ 且 $\overline{\overline{A}} \ge \overline{\overline{B}}$，则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$。

(i)需要良序定理来证明：此略。

(ii)的 Bernstein 证明比较复杂，可参见复旦的教材。

(ii)的 Banach 证明提示：要点是建立下述的集合在映射下的分解：若 $f: X \to Y$，$g: Y \to X$，则存在分解 $X = A \cup A^c$、$Y = B \cup B^c$，使得 $f(A) = B$、$g(B^c) = A^c$。

该分解定理的验证：设 $\mathscr{E}$ 为 X 中的分离集 E（既满足下述条件的 $E \subset X$）全体，

$$E \cap g(Y - f(E)) = \varnothing。$$

若 $g(Y) = X$，则可取 $A = \varnothing$，故不妨设 $g(Y) \ne X$，此时，$E = X - g(Y)$ 就是一个分离集。然后取 $A = \cup_{E \in \mathscr{E}} E$ 就可以了。

C. 可数集举例

a. 有限或可数个可数集的并是可数集。

b. 有限个可数集的积集仍为可数集，特别地 $\mathbf{N}^2 \cong \mathbf{Q}$ 为可数集。

备注：但可数个可数集的积集就不再是可数的（事实上，可数个有限集的积集就可能不再是可数的了。见后面的连续统例子）。

c. 整系数多项式全体为可数集；代数数全体为可数集。

d. 若 $\overline{\overline{A}} \ge \aleph_0$，$B$ 为至多可数集，则 $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}}$。特别地有

- 无理数全体为连续统；
- 超越数全体为连续统。

e. $\mathbf{R}$ 中互不相交的区间族至多可数。从而，$\mathbf{R}$ 上定义的单调函数的不连续点全体至多可数。

f. 设 $E \subset \mathbf{R}$ 为可数集，则存在 $x_0 \in \mathbf{R}$，使得 $E \cap (E + x_0) = \varnothing$。

g. *)设 f 为 $\mathbf{R}$ 上定义的实函数，则下述点集都是至多可数集：

- $\{x \in R^1 : \lim_{y \to x} f(y) = +\infty\}$；
- $\{x \in R^1 : f(y)在x点不连续，但右极限f(x+0)存在\}$；
- $\{x \in R^1 : 在x点左右导数f_+^/(x)、f_-^/(x)都存在但不相等\}$；
- 凸函数除一可数集外都是可导的。

h. *)作一个在有理点间断、在无理点连续的递增函数。

i. *)给出正有理数全体的一个排列 $\{r_n\}_{n\ge}$，使得 $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{r_n} = 1$。

D. 连续统举例

a. 有限或可数个连续统的并集仍为连续统。即，若每个 $\overline{\overline{A_k}} = c$，则 $\overline{\overline{\cup_k A_k}} = c$。

b. $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}} \cong \mathscr{P}(\boldsymbol{N}) \cong \mathbf{N}^{\mathbf{N}} \cong \mathbf{R}$，特别地，

- 可数个有限集的积集就不再是可数的；
- $\overline{\overline{\{自然数列全体\}}} = c$。　　注：$\{自然数列全体\} = \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$。

证明提示：

- $\overline{\overline{\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}}} = c$：利用 $(0,1]$ 的二进小数表示以及康托尔-伯恩斯坦定理：

$$(0,1] \ni x = \sum_{n\ge1}\frac{a_n}{2^n} \to (a_1, a_2, \cdots) \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}。$$

对于二进有理数要求二进小数表示中有无穷个 a_n 非零（下同），以确保表示的唯一性。

- $\overline{\overline{\mathbf{N}^{\mathbf{N}}}} = c$：利用 $(0,1]$ 的二进小数表示以及康托尔-伯恩斯坦定理。

$$(0,1] \ni x = \sum_{n\ge1}\frac{a_n}{2^n} = \sum_{k\ge1}\frac{1}{2^{n_k}} \to (n_1, n_2 - n_2, n_3 - n_2, \cdots) \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}。$$

c. 有限或可数个连续统的积集仍为连续统。即，若每个 $\overline{\overline{A_k}} = c$，则 $\overline{\overline{\prod_k A_k}} = c$。特别地有

- $\overline{\overline{R^n}} = c$；$\overline{\overline{R^{\mathbf{N}}}} = c$，即实数列全体的势为 c；
- $[a,b]$ 上连续函数全体 $C([a,b])$ 的势为 c。

证明提示：利用 $\overline{\overline{R^{\mathbf{N}}}} = c$、$[a,b]$ 上连续函数由其在有理点的函数值完全确定、康托尔-伯恩斯坦定理.

d. $[a,b]$ 上实函数全体 $\mathscr{F}$ 其势 $\overline{\overline{\mathscr{F}}} > c$。

证明提示：考虑双射 $[a,b] \xrightarrow{F} \mathscr{F}$，取 $g(x) = F(x,x) + 1$。

e. 若 $\overline{\overline{A \cup B}} = c$，则 $\overline{\overline{A}} = c$ 或 $\overline{\overline{B}} = c$。

证明提示：利用 $\overline{\overline{[0,1]^2}} = c$。

4. 势的进一步运算简介

A. 有关定义

a. $\alpha + \beta$：任取互不相交的集合 A、B，使得 $\overline{\overline{A}} = \alpha$、$\overline{\overline{B}} = \beta$，则 $\overline{\overline{A \cup B}} := \alpha + \beta$。

b. $\alpha\beta$：任取集合 A、B，使得 $\overline{\overline{A}} = \alpha$、$\overline{\overline{B}} = \beta$，则 $\overline{\overline{A \times B}} := \alpha\beta$。

c. α^{β}：任取集合 A、B，使得 $\overline{\overline{A}} = \alpha$、$\overline{\overline{B}} = \beta$，则 $\overline{\overline{A^B}} := \alpha^{\beta}$。

B. 基本性质

a. 若 $\max(\alpha,\beta) \ge \omega$，则 $\alpha + \beta = \max(\alpha,\beta)$；

b. 若 $\max(\alpha,\beta) \ge \omega$，则 $\alpha\beta = \max(\alpha,\beta)$；

c. $2^{\omega} = c$，$2^{\overline{\overline{A}}} = \overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$；

d. 交换律、结合律、分配律。

第三次讲座：
“浅谈实数系及其推广”

说明： 在这个讲座中，我们将主要介绍建立在集合论基础上的严密的实数理论体系，并把它作为带丰富数学结构的“几何体”，它的多种推广，有利学生联系后续课程与实数系之间的关联。这个讲座也只是参考性的，具体 ppt 文档另文处理（见附件材料）。

第二部分　欧氏点集初步

定义： n-维欧氏空间 R^n 定义为 $R^n = \underbrace{R^1 \times \cdots \times R^1}_{n\text{重}}$，其上定义了加法运算

$$+ : R^n \times R^n \to R^n : (x, y) \mapsto x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

与数乘运算

$$\bullet : R^1 \times R^n \to R^n : (\lambda, y) \mapsto \lambda x = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)\text{。}$$

备注：

- R^n 是一个线性空间；
- 基、点（向量）、有理点；
- 由于 R^n 是在 R^1 的基础上定义的，所以上述定义不仅有代数结构，实际上也蕴含了度量结构、拓扑结构、微分结构、展缩结构等。

1. 度量结构

A. 内积、模、距离、体积：

a) **内积：** 欧氏内积　$(x, y) = \sum_{1 \le k \le n} x_k y_k$

其它内积　$(x, y)_A = x A y^t$　　其中 A 为一 n 阶正定方阵。

b) **模长：** 欧氏模长　$|x| = \sqrt{(x, x)} = (\sum_{1 \le k \le n} x_k^2)^{1/2}$

p-模　$|x|_p = (\sum_{1 \le k \le n} x_k^p)^{1/p}$（$1 \le p < \infty$）、$|x|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |x_k|$

c) 距离： 欧氏距离　$d(x, y) = |x - y|$

$d(x, E) = \sup\{d(x, y) : y \in E\}$

$$d(F,E)=\sup\{d(x,y):x\in F,y\in E\}$$

d) 体积： 欧氏体积 $\left|\prod_{1\le k\le n}[a_k,b_k]\right|=\prod_{1\le k\le n}(b_k-a_k)$

B. 若干基本性质：

e) 内积的 Cauchy-Schwartz 不等式：$|(x,y)|\le|x||y|$ （考虑 $(x-ty,x-ty)\ge 0$）

f) 模 $|\cdot|$ 的范数性质：正定性、正齐次性、三角不等式

备注： 三角不等式可利用 Cauchy-Schwartz 不等式来证明。

g) 距离函数的度量性质：正定性、对称性、三角不等式

h) 体积函数的测度性质：可加性，即：若 $I=I_1+\cdots+I_k$，则 $|I|=|I_1|+\cdots+|I_k|$。

备注： 利用 $\{I_k\}$ 的顶点族把所有 $\{I_k\}$ 以及 I 都拆成更小的矩体，把每个 $\{I_k\}$ 以及 I 都表成

$$\prod_{1\le i\le n}((a_i,a_i+h_i^1]+(a_i+h_i^1,a_i+h_i^2]+\cdots+(a_i+h_i^{m_i}])$$

的形式

2. 拓扑结构及相关概念与性质

A. 球、矩体、直径：

a) 球：
- 开球 $B(x,r)=\{y\in R^n:|x-y|<r\}$
- 闭球 $\overline{B}(x,r)=\{y\in R^n:|x-y|\le r\}$
- 球面 $S(x,r)=\{y\in R^n:|x-y|=r\}$

b) 矩体：
- 开矩体 $I(a,b)=\prod_{1\le k\le n}(a_k,b_k)$
- 闭矩体 $\overline{I}(a,b)=\prod_{1\le k\le n}[a_k,b_k]$
- 左开右闭矩体 $\tilde{I}(a,b)=\prod_{1\le k\le n}(a_k,b_k]$

备注：
- 若矩体的各边边长相等，则称之为**方体**。
- （开）**二进方体**：$\prod_{1\le k\le n}(\frac{j_k}{2^i},\frac{j_k+1}{2^i})$（$i,j_k\in\mathbf{Z}$（$k=\overline{1,n}$））

c) **直径：** 直径： 设 $E\subset R^n$，$diam(E)=\sup\{|x-y|:x,y\in E\}$ 称为 E 的直径

有界集： 若 $diam(E)<\infty$

备注： E 为有界集当且仅当存在正数 M 使得 $|x|\le M$（$\forall x\in E$）。

B. 内点、内核、边界点、边界：

a) 内点： 设 $x\in E\subset R^n$，若存在 $r>0$，使得 $B(x,r)\subset E$，则称 x 为 E 的**内点**。

E 的内点全体组成的集合称为 E 的**内核**，记为 $\overset{\circ}{E}$。

若存在 $r>0$，使得球 $B(x,r)$ 与 E 不相交，则称 x 为 E 的**外点**。

b) 边界点： 设 $x \in R^n$，若对任意 $r>0$，$B(x,r)\cap E \neq \varnothing$ 且 $B(x,r)\cap E^c \neq \varnothing$，则称 x 为 E 的**边界点**。

E 的边界点全体组成的集合称为 E 的**边界**，记为 ∂E。

$E \cup \partial E$ 称为 E 的**闭包**，记为 $\overline{E}$。

c) 备注与例子：

- E 中点要么是内点、要么是边界点。R^n 中点要么是 E 的内点、要么是 E 的边界点、要么是 E 的外点。
- 例子：$B(0,1)$、$I(0,1)$、……
- 例子：$B(0,1)$ 中的有理点全体、$(0,1)$ 作为 R^1 中点集与作为 R^2 中点集。

C. 开集、闭集：

a) 开集： 每个点都是内点的集合称为开集。规定空集为开集。

b) 闭集： 开集的余集称为闭集。

c) 备注：

- 书上几个定义的程序：距离—**极限**—闭集—开集。我们这里定义方式不同：距离—开集—闭集与**极限**。前一种定义极限的方式与数列极限定义类似，更容易理解；后一种方式有利于今后极限概念的推广。两种方式导致开闭集的定义方式也不同。
- 例子：有限集为闭集，R^n 中的闭矩体为闭集。
- *) 例子：$\overline{\{\cos k : k \geq 1\}} = [-1,1]$，$\overline{\{p+\alpha q : p,q \in \mathbf{Z}\}} = R^1$（$\forall \alpha \notin \mathbf{Q}$）。

D. 若干基本性质：

a) 开集的拓扑性质；关于有限交封闭、关于任意并封闭。
b) 闭集的运算性质；关于有限并封闭、关于任意交封闭。
c) 边界点的简单性质：
- $\overline{E}$ 与 ∂E 均为闭集。
- E 为闭集的充要条件是 $E \supset \partial E$，即 $E = \overline{E}$。
- E 为开集的充要条件是 $E \cap \partial E = \varnothing$。

d) 开集的构造性质；
- R^1 中非空开集是至多可数个互不相交的开区间（含无界开区间）的并集。
- R^n 中非空开集是可数个互不相交的左开右闭方体的并集。

备注：
- R^1 中开集的**构成区间**。
- R^n 中非空开集必可写成 $\{B(x,1/k) : k \in \mathbf{N}, x\text{为有理点}\}$ 中可数个元素的并集。

3. 极限点及相关概念与性质：

A　极限及相关概念

a). 点列极限： 设 $\{x_k\}_{k\geq 1}\subset R^n$，若存在 $x_0\in R^n$，使得 $|x_k-x_0|\xrightarrow{k\to\infty}0$，则称 $\{x_k\}_{k\geq 1}$ 收敛（于 x_0），简记为 $\lim_{k\to\infty}x_k=x_0$。

备注： 若设 $x_k=(x_1^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})$，易见 $\{x_k\}_{k\geq 1}$ 收敛于 x_0 的充要条件为数列 $\{x_j^{(k)}\}_{k\geq 1}$ 收敛于 $x_j^{(0)}$（$\forall j=\overline{1,n}$）。

b). Cauchy 列： 设 $\{x_k\}_{k\geq 1}\subset R^n$，若 $|x_k-x_j|\xrightarrow{k,j\to\infty}0$，则称 $\{x_k\}_{k\geq 1}$ 为 Cauchy 列。

备注： 若设 $x_k=(x_1^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})$，易见 $\{x_k\}_{k\geq 1}$ 为 Cauchy 列的充要条件是每个 $\{x_j^{(k)}\}_{k\geq 1}$ 为 Cauchy 列（$\forall j=\overline{1,n}$）。

B　极限点及其相关概念：

a). 极限点（聚点）：

- 若存在 $\{x_k\}\subset E-\{x_0\}$，使得 $x_k\to x_0$，则称 x_0 为 E 的一个极限点（也称 E 的聚点）；
- 若存在 $\{x_k\}$ 的一个子列 $\{x_{k_j}\}$，它收敛于 x_0，则称 x_0 为 $\{x_k\}$ 的一个极限点（注意：此时不称聚点）。

b). 孤立点： 若存在 $r>0$，使得 $B(x,r)\cap E=\{x\}$，则称 x 为 E 的孤立点。

c). 导集： E 的极限点全体记为 E'，称为 E 的导集。

d). 完全集： 若 $E=E'$，则称 E 为完全集。

e). 备注：

- 内点必为聚点，边界点要么是孤立点要么是聚点。
- 内核必在 E' 中，边界点若不是孤立点则必在导集中；因此，E' 由内核与非孤立点的边界点组成。
- 完全集就是一个没有孤立点的闭集。

C　稠密集及其相关概念：

a). 稠密集： 若 $A\subset B$ 且 $\overline{A}\supset B$，则称 A 在 B 中，或称 A 为 B 的稠密子集。

b). 无处稠密集： 若 $\overline{A}$ 没有内点，则称 A 为无处稠密集。

备注：

- 无处稠密集又称为疏朗集.
- 一个集合为无处稠密集的充要条件是它在任何非空开集中都不稠密，这又等价于任何球中都含有一个与该集不相交的小球。
- 无处稠密集的余集必为稠密集（即 R^n 的稠密子集）

c). **第一纲集（贫集）：** 可数个无处稠密集的并集称为第一纲集，又称贫集。

备注： 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是第一纲集。任何可数集都是第一纲集。

d). **第二纲集：** 不是第一纲集的集合称为第二纲集。

D 若干性质：

a). 点列极限的基本性质： 唯一性、线性性、……

b). 有关极限点的若干基本性质

■ x_0 为 E 的极限点 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $r>0$，$(B(x_0,r)-\{x_0\})\cap E\neq\varnothing$

$\Longleftrightarrow$ 对任意 $r>0$，$B(x_0,r)\cap E$ 为无穷集

$\Longleftrightarrow \exists x_k\in E-\{x_0\}$，$s.t.$ $x_k\to x_0$。

备注： 若对任意 $r>0$，$B(x_0,r)\cap E$ 为不可数集，则称 x_0 为 E 的**凝聚点**。

■ x_0 为 $\{x_k\}$ 的极限点 $\Longleftrightarrow$ x_0 为集合 $\{x_k:k\geq1\}$ 的极限点，或存在常子列 $x_{k_j}=x_0$（$j\geq1$）。

■ $x_0\in\partial E\Rightarrow x_0$ 为孤立点或者在 $E'-\overset{\circ}{E}$ 中。

■ E 为闭集 $\Longleftrightarrow E'\subset E\Longleftrightarrow$ 对任意 $\{x_k\}\subset E$，若 $x_k\to x_0$，则 $x_0\in E$。

■ $\overline{E_1\cup\cdots\cup E_k}=\overline{E}_1\cup\cdots\cup\overline{E}_k$；

备注： 对无穷并不成立，对取边界运算不成立，对取交运算不成立。

■ $(E_1\cup\cdots\cup E_k)'=E_1'\cup\cdots\cup E_k'$。

备注： 这个性质对无穷并并不成立、对取交运算不成立。

c). Cauchy 收敛原理： Cauchy 列必收敛。

d). 聚点原理： R^n 中任一有界无限点集必有聚点。

备注（致密性定理）：R^n 中任一有界点列必收敛。

e). Baire 范畴定理： 可数个无处稠密集的并集不含内点。

E 若干例子

a). 导集与孤立点举例：

◆ 有限集的导集 $E'=\varnothing$；反之，根据聚点原理，若 $E'=\varnothing$，则对任意 $r>0$，$B(0,r)\cap E$ 为有限集。

◆ $\{1/k:k\geq1\}$

◆ $\{\sqrt{n}-\sqrt{m}:n,m\geq1\}$（考虑 $\sqrt{[x+n]^2}-\sqrt{n^2}$）。

b). 第二纲集举例：

◆ R^n、$B(0,1)$、$I(0,1)$、……

◆ 无理数全体、超越数全体、$B(0,1)$ 中非有理点全体、……

c). 完全集举例：

◆ $E\subset R^1$ 中为完全集当且仅当 $E=(\cup_{k\geq1}(a_k,b_k))^c$ 且 $\{(a_k,b_k)\}_{k\geq1}$ 中任两个都没有公共端点。

◆ R^1 中完全集必为不可数集。（提示：反证法）

*) **备注：事实上，每个完全集都是连续统。**

◆ 不可数集必有凝聚点，且它自身必有点是凝聚点。（提示：等分法、非凝聚点至多可数）

4. 紧集及相关概念与性质：

A. 紧集及其相关概念：

a). 开覆盖：设 $E \subset R^n$，$\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(R^n)$ 是一组开集，若 $\cup\mathscr{U} \supset E$，则称 $\mathscr{U}$ 为 E 的一个开覆盖；若 $\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$ 仍是 E 的一个开覆盖，则称其为 E 的一个子覆盖。

b). 紧集：若 E 的任一开覆盖都有一个有限的子覆盖，则称 E 为紧集。

c). 列紧集：若 E 中的任一点列都有一个收敛于 E 中点的子列，则称 E 为列紧集。

d). 有限交性质：$\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(R^n)$，若对任意有限子族 $\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$，$\cap\mathscr{U}' \neq \varnothing$，则称 $\mathscr{U}$ 具有有限交性质。

B. 若干性质

a). 有限覆盖定理： R^n 中有界闭集必为紧集。

备注：

- 书上的证明需要下述引理：$E \subset R^n$ 的任一开覆盖都有一个至多可数的子覆盖。然后利用闭集套定理来证。
- 事实上，我们可直接用致密性定理与二分法来证明。
- 条件讨论：闭与有界都不能去掉。

b). 有限覆盖定理的逆： R^n 中紧集必为有界闭集。

c). 紧集的列紧性： R^n 中集合的紧性等价于列紧性。

d). 闭集套定理：设 $\{F_k\}$ 为 R^n 中的一列单调下降的非空有界闭集，则 $\cap F_k \neq \varnothing$。

备注：

- 若要求 $diam(F_k) \to 0$，则 $\cap F_k$ 为单点集。
- *) 有限交定理：设 $\mathscr{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 R^n 中的一族具有有限交性质的非空有界闭集，则 $\cap\mathscr{F} \neq \varnothing$。
- *)有限交定理证明提示：用反证法。任取 $\alpha_0 \in \Lambda$，则 $\{(F_{\alpha_0} \cap F_\alpha)^c\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 F_{α_0} 的开覆盖。再用有限覆盖定理可得 $F_{\alpha_0} \subset F_{\alpha_0}^c \cup (\cap_1^m F_{\alpha_k})^c$，这与有限交性质矛盾。

e). 距离函数的基本性质：

- 若 $x_0 \in R^n$，$F \subset R^n$ 为闭集，则存在 $y_0 \in F$，使得 $d(x_0, y_0) = d(x_0, F)$。
- 若 $E \subset R^n$ 为紧集，$F \subset R^n$ 为闭集，则存在 $x_0 \in E, y_0 \in F$，使得

$d(x_0, y_0) = d(E, F)$。

■ 若 $E \subset R^n$ 为紧集，$G \subset R^n$ 为开集，$E \subset G$，则 $d(E, \partial G) > 0$。

备注： 以上性质中闭、紧的条件不能减弱。

5. Borel 集与连续函数：

A. Borel 集及其相关概念：

a). Borel 集： 由开集生成的 σ-代数称为 Borel σ-代数，Borel σ-代数中的元素称为 Borel 集。

b). F_σ**-型集：** 闭集的可数并称为 F_σ-型集。

c). G_δ**-型集：** 开集的可数交称为 G_δ-型集。

d). 其它： $F_{\sigma\delta}$**-型集----** F_σ-型集的可数交，$G_{\delta\sigma}$**-型集----** G_δ-型集的可数并，……

e). 例子：

■ $(0,1]$ 即是 F_σ-型集 $\cup(\frac{1}{k},1]$，又是 G_δ-型集 $\cap(0,1+\frac{1}{k})$。

■ 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是 F_σ-型集，无理数集是 G_δ-型集。

备注： 由 Baire 范畴定理可知，$\mathbf{Q}$ 不是 G_δ-型集，从而无理数集不是 F_σ-型集。（考虑分解 $R^1 = (R^1\text{-}\mathbf{Q}) \cup \mathbf{Q}$）

B. 函数极限与连续性概念：

a). 函数极限： 设 f 定义在 E 上，$x_0 \in R^n$，$A \in R^1$。若对任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，当 $x \in (B(x_0,\delta) - \{x_0\}) \cap E$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 f 在 x_0 点沿 E 的极限收敛于 A，记为 $\lim_{E \ni x \to x_0} f(x) = A$。

备注： 类似可定义 $\lim_{E \ni x \to x_0} f(x) = (\pm)\infty$、$\lim_{E \ni x \to \infty} f(x) = A, (\pm)\infty$，等。

b). 函数连续：

■ **在一点连续：** 设 f 定义在 E 上，$x_0 \in E$，若对任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，当 $x \in B(x_0,\delta) \cap E$ 时，$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$，则称 f 在 x_0 点连续。

■ **在一集合上连续：** 若 f 在 E 的每一点上都连续，则称 f 在 E 上连续。E 上连续的函数全体记为 $C(E)$。

■ **一致连续：** 设 f 定义在 E 上，若对任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，当 $x, y \in E$ 且 $|x - y| < \delta$ 时，$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$，则称 f 在 E 上一致连续。

备注：

- 上述极限与连续的定义又称为限制性极限与连续。
- $d(x, F)$ 在 R^n 上一致连续。

C. 振幅：

a). 函数在 x_0 点的振幅：

设 f 定义在 E 上，f 在 x_0 点的振幅定义为

$$\omega_f(x_0)=\lim_{\delta\to 0+}\sup_{x',x''\in E\cap B(x_0,\delta)}\left|f(x')-f(x'')\right|,$$

显然，f 在 $x_0\in E$ 点连续的充要条件为 $\omega_f(x_0)=0$。

b). 连续模：

设 f 定义在 E 上，下述函数

$$\omega(f,\delta)=\sup_{x',x''\in E,\left|x'-x''\right|<\delta}\left|f(x')-f(x'')\right|$$

称为 f 的连续模。显然，f 在 E 上一致连续的充要条件为

$$\omega(f,\delta)\xrightarrow{\delta\to 0+}0。$$

D. 有关性质：

a). 映射连续性的开闭集刻画：

- 设 $f:E\to R^1$，则 $f\in C(E)\Longleftrightarrow$ 对任意开集 $G\subset R^1$，$f^{-1}(G)$ 是 E 的相对开集，即存在开集 $O\subset R^n$ 使得 $f^{-1}(G)=O\cap E$。
- 设 $f:E\to R^1$，则 $f\in C(E)\Longleftrightarrow$ 对任意闭集 $F\subset R^1$，$f^{-1}(F)$ 是 E 的相对闭集，即存在闭集 $W\subset R^n$ 使得 $f^{-1}(F)=W\cap E$。

b). 连续函数的基本性质：

- 四则运算性质、复合函数的连续性、……
- 有界性定理、最大最小值定理、一致连续性定理、……
- 不动点定理：设 $F\subset R^n$ 为有界闭集，$f:F\to F$，若 $\left|f(x)-f(y)\right|<\left|x-y\right|$（$x,y\in F$），则存在 $x_0\in F$，使得 $f(x_0)=x_0$。

c). 连续函数的延拓定理：若 $F\subset R^n$ 为闭集，f 为 F 上定义的连续函数且 $\left|f(x)\right|\le M$（$\forall x\in F$），则存在 R^n 上定义的连续函数 g，满足 $\left|g(x)\right|\le M$（$\forall x\in R^n$），且 $g(x)=f(x)$（$\forall x\in F$）。

备注：

- 若 $F_1,F_2\subset R^n$ 为互不相交的非空闭集，则 $f(x)=\frac{d(x,F_2)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)}$ 在 R^n 上连续，在 F_2 上恒为 0，在 F_1 上恒为 1。
- 考虑函数 $g(x)=\frac{M}{3}\frac{d(x,B)-d(x,A)}{d(x,B)+d(x,A)}$。
- 上述延拓定理可推广到无界函数。

d). 有关函数的一些特殊性质点集的结构：

- **函数连续点的结构：** 若 f 是定义在开集 $G\subset R^n$ 上的实值函数，则 f 的连续点全体是 G_δ-型集。

备注：$\cap_{k\ge1}\{x\in G:\omega_f(x)<1/k\}$

- ■ *)**函数可微点的结构：**若 f 是 R^1 上的连续函数，则 f 的可微点全体是 $F_{\sigma\delta}$-型集。

  备注：通过 $\overline{\lim}_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 与 $\underline{\lim}_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 来考虑不可微点全体。

- ■ *)**连续函数列极限函数连续点集的结构：**处处收敛的连续函数列其极限函数的连续点全体为 G_δ-型集。

  备注：该集可表为 $\cap_{m\ge1}\cup_{k\ge1}\{x\in R^n:|f_k(x)-f(x)|\le1/m\}^o$。

- ■ *)**连续函数列极限函数的刻画：**设 f 定义在 R^1 上，则下述三条等价
  - ◆ f 是连续函数列的极限；
  - ◆ 对任意实数 t，$f^{-1}((t,+\infty))$ 与 $f^{-1}((-\infty,t))$ 都是 F_σ-型集；
  - ◆ 对任意开集 G，$f^{-1}(G)$ 是 F_σ-型集。

  备注：
  - $f^{-1}((t,+\infty))=\cup_{k\ge1}\cup_{m\ge1}\cap_{n\ge m}\{f_n(x)\ge t+1/k\}$
  - （iii）$\Rightarrow$（i）参见书本第 49 页。
  - 区间 I 上的连续函数列的极限全体称为 Baire 第一函数类，记为 $B_1(I)$；$B_1(I)$ 中一致收敛的函数列，其极限函数也在 $B_1(I)$ 中。

E. Cantor 集与 Cantor 函数

a). Cantor 集 C

- ➢ **构造：**
- ➢ **性质：**紧、完全、无内点、连续统

  备注：
  - ■ 事实上，任意非空完全集都是连续统。
  - ■ Cantor 集的“维数”为 $\log2/\log3\approx0.6309$。简提分形几何学。
- ➢ **Harnack 集 C_p：**

b). Cantor 函数 Φ

- ➢ **构造：**
- ➢ **性质：**单调上升、连续、在 $[0,1]-C$ 的构成区间上为常数。

勒贝格测度与积分

授课说明：

勒贝格测度与积分是实变函数课程的核心内容，分三部分讲授，第一部分有关“勒贝格测度”，第二部分有关“可测函数”，第三部分有关“勒贝格积分”。

第一部分主要从三个方面来介绍，一是勒贝格测度的定义与基本性质，特别是 Carathéodory 定理；二是 Borel 集的可测性，以及勒贝格测度的正则性，勒贝格可测集的等价刻画等；三是勒贝格测度在线性变换下的变化等。

第二部分主要介绍两个方面内容，一是可测函数的概念与性质，包括可测函数的构造与逼近；二是可测函数列的三种收敛性以及它们之间的关系等。

第三部分主要介绍，一是积分的定义与性质，包括积分与极限次序交换的三大基本定理、积分与积分次序交换的 Fubini 定理等；二是涉及积分变换替换及相关性质；三是 Lebesgue 空间 L^p 定义与基本性质等。

授课内容清单：

第一部分　勒贝格测度

1. 勒贝格外测度
2. 勒贝格可测集与勒贝格测度
3. 可测集与 Borel 集之间的关系
4. 内测度
5. 勒贝格测度的若干进一步性质

第二部分　可测函数

1. 可测函数的概念与性质
2. 可测函数列的收敛概念与性质

第三部分　勒贝格积分

1. 积分的定义及其基本性质
2. 积分的进一步性质
3. L^p 空间介绍

第一部分　勒贝格测度

1. 勒贝格外测度

A. 定义：

a) **定义：** $m^*(E)=\inf\{\sum_{k\geq 1}|I_k|:\{I_k\}_{k\geq 1}\text{为}E\text{的开长方体覆盖}\}$

称为 E 的勒贝格外测度。

b) **等价形式：** “开长方体覆盖”可以等价地换成“闭长方体覆盖”，

也可等价地换成“长方体覆盖”，

也可把“长方体”等价地换成“方体”，

也可以把“开长方体”等价地换成“左开右闭方体”，等等。

c) 例子：

- 单点集的外测度
- （开或闭）长方体的外测度
- 可数集（特例：有理数集）的外测度（比较 Jordan 测度）

d) 备注：

- 对任何长方体 I（无论开、闭、左开右闭、不开不闭等），均定义 $|I|$ 为其边长的乘积。
- 假设长方体有限族 $\{I_k\}_{N\geq k\geq 1}$ 覆盖了长方体 I，则有

$$\sum_{N\geq k\geq 1}|I_k|\geq |I|。$$

B. 若干基本性质：

a) 外测度性质：　（非负性）$m^*(E)\geq 0$，$m^*(\varnothing)=0$；

（单调性）若 $E\subset F$，则 $m^*(E)\leq m^*(F)$；

（可列次可加性）$m^*(\cup_{k\geq 1}E_k)\leq \sum_{k\geq 1} m^*(E_k)$。

b) 距离外测度性质：　若 $d(E,F)>0$，则 $m^*(E\cup F)=m^*(E)+m^*(F)$。

备注：（引理）$m^*(E)=m^*_\delta(E)$，其中 $\delta>0$，而

$$m^*_\delta(E)=\inf\{\sum_{k\geq 1}|I_k|:\{I_k\}_{k\geq 1}\text{为}E\text{的开长方体覆盖，}I_k\text{边长}\leq\delta\}。$$

c) 介值性质：设 $E\subset[a,b]$，$m^*(E)>0$，$m^*(E)>c>0$，则存在 $A_c\subset E$，使得 $m^*(A_c)=c$。

备注：考虑 $f(t)=m^*(E\cap[a,t])$。对高维也有类似结论。

d) 平移不变性：$m^*(E+\{x_0\})=m^*(E)$，其中 $E+\{x_0\}=\{x+x_0: x\in E\}$。

e) 线性变换下的情形：$m^*(T(E))=|\det T|m^*(E)$，其中 $T:R^n\to R^n$ 为非退化线性变换。特别地，在展缩变换下有 $m^*(aE)=|a|^n m^*(E)$，其中 $a\in R^1$。

备注：此性质只要求会用就行。其证明可归结为三类基本初等变换的情形，细节此略。

2. 勒贝格可测集与勒贝格测度

A. 定义：

a). **定义**：设 $E\subset R^n$。若对任意 $T\subset R^n$，都有

$$m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$$

则称 E 为勒贝格可测集。

b). **备注**：

- 勒贝格测度 $m(E)$、勒贝格可测集全体 $\mathscr{M}$。
- 在定义中不妨假设 $m^*(T)<+\infty$，并且只要证明

$$m^*(T)\geq m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)。$$

- 零测集的概念。
- 由可测集分离的集合其外测度具有可加性：若 $\{T_k\}_{k\geq1}$ 互不相交，且存在互不相交的可测集 $\{E_k\}_{k\geq1}$ 使得 $T_k\subset E_k$，则 $m^*(\cup_{k\geq1}T_k)=\sum_{k\geq1}m^*(T_k)$。

B. 基本性质：

a). **Carathéodory 定理：**

- $\mathscr{M}$ 为一 $\sigma-$代数，即：
  - $\varnothing, R^n\in\mathscr{M}$，
  - $\mathscr{M}$ 关于取余运算封闭，
  - $\mathscr{M}$ 关于取可数并运算封闭。
- m 为 $\mathscr{M}$ 上的一个完备测度，即：
  - $m(\varnothing)=0$，
  - m 具有可列可加性：若 $\{E_k\}_{k\geq!}\subset\mathscr{M}$ 互不相交，则

$$m(\cup_{k\geq1}E_k)=\sum_{k\geq1}m(E_k),$$

  - 零测集的子集也是可测的，且为零测集。

  备注：$\mathscr{M}$ 关于交、差等运算也封闭。

b). **测度性质：**

- **单调性：** 若 $A \subset B$，则 $m(A) \le m(B)$。
- **可列次可加性：** $m(\sum_{k\ge1} A_k) \le \sum_{k\ge1} m(A_k)$。
- **下连续性：** 若 $A_k \uparrow A$，则 $m(A_k) \uparrow m(A)$。
- **上连续性：** 若 $A_k \downarrow A$ 且 $\inf_k m(A_k) < +\infty$，则 $m(A_k) \downarrow m(A)$。

备注：(a). 上连续性性质中条件“$\inf_k m(A_k) < +\infty$”不能去掉，例子（先假设已知区间的可测性，参见后面 Borel 集的可测性）

$$A_k = [k,+\infty) \downarrow \varnothing，\quad 但 +\infty = m(A_k) \xrightarrow{\times} m(\varnothing) = 0。$$

(b). 其实，外测度也具有下连续性，参见后面的 3 B d)。

c). **例子：**

- 若 $\sum_{k\ge1} m(A_k) < +\infty$，则 $m(\overline{\lim}_{k\to+\infty} A_k) = 0$。
- $m(\underline{\lim}_{k\to+\infty} A_k) \le \underline{\lim}_{k\to+\infty} m(A_k)$
- 若 $E = \{x \in [0,1]$: 在十进位表示 $x \quad 0.a_1a_2\cdots$ 中，所有 a_i 都不出现某个数字$\}$，则 E 为不可数集，但是 $m(E) = 0$。

3. 可测集与 Borel 集之间的关系

至此，除了 $\varnothing, R^n \in \mathscr{M}$ 以及部分零测集外，我们尚未给出任何其它可测集的例子。

A. Borel 集的可测性：

a). **闭球的可测性：** 任何闭球都是可测的。

证明： 考虑闭球 $\overline{B} = \overline{B(0,r)}$。对任意 $T \subset R^n$，不妨设 $m^*(T) < +\infty$，记

$$T_k = \{x \in T : d(x, \overline{B}) \ge 1/k\},$$

显然有 $T_k \uparrow T \cap \overline{B}^c$，$d(T_k, T\cap\overline{B}) \ge 1/k > 0$，从而

$$m^*(T) \ge m^*((T\cap\overline{B}) \cup T_k) = m^*(T\cap\overline{B}) + m^*(T_k),$$

因此，为证 $\overline{B}$ 可测，只要证明：$m^*(T_k) \uparrow m^*(T\cap\overline{B}^c)$。（这是外测度下连续性的一个特殊情形，参见后面的 3 B d)）。注意到，$\forall m \ge 1$

$$\begin{aligned} T\cap\overline{B}^c &= \lim T_k = T_{2m} \cup (\cup_{k\ge2m}(T_{k+1}-T_k)) \\ &= T_{2m} \cup (\cup_{j\ge m}(T_{2j+1}-T_{2j})) \cup (\cup_{j\ge m}(T_{2j+2}-T_{2j+1})) \end{aligned},$$

而由 $d(T_{j+1}-T_j, T_{j-1}-T_{j-2}) \ge \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} > 0$，根据度量外测度性质，我们有

$$\sum_{j\ge m} m^*(T_{2j+1}-T_{2j}) = \lim_{N\to\infty} m^*\left(\sum_{N\ge j\ge m}(T_{2j+1}-T_{2j})\right) \le m^*(T) < \infty$$

$$\sum_{j\ge m} m^*(T_{2j+2}-T_{2j+1}) = \lim_{N\to\infty} m^*\left(\sum_{N\ge j\ge m}(T_{2j+2}-T_{2j+1})\right) \le m^*(T) < \infty,$$

所以

$$m^*(T\cap\overline{B}^c) \le \lim_{m\to+\infty}\left(m^*(T_{2m}) + \sum_{j\ge m} m^*(T_{2j+1}-T_{2j}) + \sum_{j\ge m} m^*(T_{2j+2}-T_{2j+1})\right)$$

$$= \lim_{m\to\infty} m^*(T_{2m}) \le m^*(T\cap\overline{B}^c),$$

由此得 $m^*(T_k)\uparrow m^*(T\cap\overline{B}^c)$。

b). **开集的可测性**：任何开集都是可测的。

注：

- 任何开集都可以表示成闭球的可数并。这个证明可以推广到度量空间上。
- 任何开集都可以表成方体的不交可数并，所以，也可以通过证明方体的可测性来得到开集的可测性，而且很简单。

c). **Borel 集的可测性**：任何 Borel 集都是可测的。

注：Borel 是由开集生成的 $\sigma-$代数，所以是 $\mathscr{M}$ 的子 $\sigma-$代数。

d). **备注**：

- *) Carathéodory 引理：设开集 $G\neq R^n$，$E\subset G$。令

$$E_k=\{x\in E: d(x,G^c)\geq 1/k\}\ (\forall k\geq 1),$$

则 $\lim m^*(E_k)=m^*(E)$。

- 任何闭集都是可测的。
- *) 存在可测的非 Borel 集（参见后面连续变换内容）。

B. 勒贝格测度的正则性

a). **测度的逼近**：设 $E\in\mathscr{M}$。对任意 $\varepsilon>0$，我们有

- 存在开集 $G\supset E$，使得 $m(G-E)<\varepsilon$；
- 存在闭集 $F\subset E$，使得 $m(E-F)<\varepsilon$。（注：对 E^c 使用上述性质并利用 $E-G^c=G-E^c$）

b). **可测集的构造**：设 $E\in\mathscr{M}$。我们有

- 存在 G_δ-型集 $H\supset E$，使得 $m(H-E)=0$；
- 存在 F_σ-型集 $K\subset E$，使得 $m(E-K)=0$。

c). **勒贝格测度的正则性**：

- 外测度的正则性：设 $E\subset R^n$。存在含 E 的 G_δ-型集 H，使得 $m(H)=m^*(E)$。
- 测度的外正则性：设 $E\in\mathscr{M}$，我们有 $m(E)=\inf\{m(G):\text{开集}G\supset E\}$。
- 测度的内正则性：设 $E\in\mathscr{M}$，我们有 $m(E)=\sup\{m(K):\text{紧集}K\subset E\}$。

备注：外测度有如下多种等价刻画方式

d). **几个推论**：

- 设 $E_k\subset R^n$（$k\geq 1$），我们有 $m^*(\underline{\lim} E_k)\leq\underline{\lim}\, m^*(E_k)$。
- 设 $E_k\subset R^n$（$k\geq 1$），若 $E_k\uparrow$，则 $m^*(\lim E_k)=\lim m^*(E_k)$。
- 设 $E\in\mathscr{M}$，$x_0\in R^n$，则 $E+\{x_0\}\in\mathscr{M}$ 且 $m(E+\{x_0\})=m(E)$。

4. 内测度

A. 勒贝格内测度的定义

对任意有界集 $E\subset R^n$，定义其勒贝格内测度如下：任取一个球 $B\supset E$，令

$$m_*(E)=m(B)-m^*(E)。$$

备注：上述定义与球 $B\supset E$ 的取法无关；其实，对任意可测集 $A\supset E$，都有：

$$m_*(E)=m(A)-m^*(E)。$$

B. 勒贝格内测度的等价刻画方式

我们有：对任意有界集 $E\subset R^n$，其勒贝格内测度有下述等价刻画：

- $m_*(E)=\sup\{m(F):F\subset E，且F为闭集\}$
- $m_*(E)=\sup\{m(F):K\subset E，且K为紧集\}$
- $m_*(E)=\sup\{m(F):A\subset E，且A为可测集\}$

C. 勒贝格可测的等价刻画

我们有：对任意有界集 $E\subset R^n$，其为勒贝格可测的充要条件为 $m_*(E)=m^*(E)$。

5. 勒贝格测度的若干进一步性质介绍

A. 勒贝格不可测集

a). **存在性**：R^n 中存在勒贝格不可测集。

为简单起见，考虑 $n=1$：在 $(0,1]$ 中引入等价关系："$x\sim y$"当且仅当"$x-y$ 为有理数"。在此等价关系下，$(0,1]$ 被分成诸多等价类 $(0,1]/\sim$，在每个等价类 $x^{\sim}$ 中取一个代表元，这些代表元全体组成的集合记为 E。令

$$E_r=(\{x+r:x\in E\}\cap(0,1])\cup(\{x+r-1:x\in E且x+r>1\})$$

其中 $r\in\mathbf{Q}\cap[0,1)$，则

- $\{E_r\}_{r\in\mathbf{Q}\cap[0,1)}$ 互不相交
- $\cup_{r\in\mathbf{Q}\cap[0,1)}E_r=(0,1]$
- 若 E 可测，则每个 E_r 都可测且 $m(E_r)=m(E)$。

b). *)**备注：**任何正测集都含有勒贝格不可测子集。

B. 正测集与矩体之间的关系

a). 正测集中点的局部密集性：

- 设 $E\in\mathscr{M}$，$m(E)>0$，$0<\lambda<1$。存在矩体 I，使得 $\lambda<\frac{m(E\cap I)}{m(I)}$。
- 在 $[0,1]$ 区间中存在正测集 E，使得对于 $[0,1]$ 中的任意开区间 I，都有 $0<\frac{m(E\cap I)}{m(I)}<1$。

备注：上述结论表明，任何一个正测集，其中总有一部分被一个矩体框住，使得两者的测度差小于事先任意给定的正数。但是，这一测度差不一定能

等于零。

b). 正测集向量差的一个性质：

■ Steinhaus：设 $E\in\mathscr{M}$， $m(E)>0$，作向量差集

$$E-E=\{x-y:x,y\in E\},$$

则有 $\delta_0>0$，使得 $E-E\supset B(0,\delta_0)$。

■ 一个应用：设 f 为一元实函数，满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\ (\forall x,y\in R^1)$$

且在某正测集 $E\subset R^1$ 上有界，则 $f(x)=f(1)x$（$\forall x\in R^1$）。

C. 连续变换与可测集

a). **连续变换：**

■ 定义：$T:R^n\to R^n$ 被称为是连续变换，如果对任意开集 $G\subset R^n$，$T^{-1}(G)$ 是开集。

■ 性质与例子：

- ➢ $T:R^n\to R^n$ 连续的充要条件为：$\forall x\in R^n$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta_{x,\varepsilon}>0$，使得当 $|x-y|<\delta$ 时，$|T(x)-T(y)|<\varepsilon$。
- ➢ 线性变换 $T:R^n\to R^n$ 必连续。
- ➢ 若 $T:R^n\to R^n$ 连续，则对任意紧集 $K\subset R^n$，$T(K)$ 也是紧集。
- ➢ 设 $T:R^n\to R^n$ 连续。若零测集的像集必为零测集，则可测集的像集也是可测集。
- ➢ 若 $T:R^n\to R^n$ 连续，则 Borel 集的原像也是 Borel 集。
- ➢ 存在可测的非 Borel 集。（备注：利用 Cantor 函数）

b). 线性变换下的可测集

■ 若线性变换 $T:R^n\to R^n$ 非退化，则对任意 $E\subset R^n$，$m^*(T(E))=|\det T|m^*(E)$。

■ 若线性变换 $T:R^n\to R^n$ 非退化，则对任意 $E\in\mathscr{M}$，$T(E)\in\mathscr{M}$ 且

$$m(T(E))=|\det T|m(E)。$$

■ 几个例子：

- ➢ 旋转变换下可测集的测度不变。
- ➢ 三角形的测度就是它的面积。
- ➢ 圆盘的测度就是它的面积。
- ➢ 扇形的测度就是它的面积。

第二部分　　勒贝格可测函数

§1　可测函数的概念与性质

1. 定义

(1). 广义实数集及有关符号运算

设：

$$\overline{R}=[-\infty,+\infty]$$

其上符号运算约定如下：

- $\forall x\in R$，$-\infty<x<+\infty$；
- $x\pm(\pm\infty)$、$(\pm\infty)\pm x$、$(\pm\infty)+(\pm\infty)$、$(\pm\infty)-(\mp\infty)$、$\pm(\pm\infty)$、$|\pm\infty|$，……
- $x\cdot(\pm\infty)$（$\forall x\neq 0$）$\forall x\in R$、$0\cdot(\pm\infty)$、$(\pm\infty)\cdot(\pm\infty)$、$(\pm\infty)\cdot(\mp\infty)$、……

注意：$(\pm\infty)-(\pm\infty)$ 没有意义。

(2). 测函数的定义

设：

X 为 R^n 中非空可测集，f：X $\to$ $\overline{R}$。

若 $\forall t\in R$，

$$f^{-1}((t,+\infty])=\{x\in X: f(x)>t\}$$

都是可测集，则称 f 为（可测集）X 上定义的（广义实值）可测函数。

注：由可测性定义易得：若 f 可测，则下述集合均为可测

- $f^{-1}([t,+\infty])=\{x\in X: f(x)\geq t\}$，因为 $f^{-1}([t,+\infty])=\cap_{k\geq 1}f^{-1}((t-1/k,+\infty])$；
- $f^{-1}(\{t\})$，因为 $f^{-1}(\{t\})=f^{-1}([t,+\infty])-f^{-1}((t,+\infty])$；
- $f^{-1}(\{+\infty\})$，因为 $f^{-1}(\{+\infty\})=f^{-1}([t,+\infty])-\cup_{k\geq 1}(f^{-1}((k,+\infty]))^c$；
- $f^{-1}([a,b])$，因为 $f^{-1}([a,b])=f^{-1}([a,+\infty])-f^{-1}((b,+\infty])$；

…………

(3). 等价定义

设 X 为 R^n 中非空集可测集，f：X $\to$ $\overline{R}$，则下述条件相互等价：

a). f 为可测;

b). $\forall r\in\mathbf{Q}$，$f^{-1}((r,+\infty])$ 可测;

c). $\forall t\in\mathbf{R}$，$f^{-1}([t,+\infty])=\{x\in X: f(x)\geq t\}$ 可测;

d). $\forall t\in\mathbf{R}$，$f^{-1}([-\infty,t))=\{x\in X: f(x)<t\}$ 可测;

e). $\forall t\in\mathbf{R}$，$f^{-1}([-\infty,t])=\{x\in X: f(x)\leq t\}$ 可测;

f). $\forall t,s\in\mathbf{R}$，$s<t$，$f^{-1}([s,t])=\{x\in X: s\leq f(x)\leq t\}$ 可测，并且 $f^{-1}(\{+\infty\})$ 与

$f^{-1}(\{-\infty\})$ 之一可测；

g). $\forall t,s\in\mathbf{R}$，$s<t$，$f^{-1}((s,t))=\{x\in X: s<f(x)<t\}$ 可测，并且 $f^{-1}(\{+\infty\})$ 与 $f^{-1}(\{-\infty\})$ 之一可测；

备注：

- 等价刻画形式多样，还可以列出更多，比如

“$\forall t,s\in\mathbf{R}$，$s<t$，$f^{-1}((s,t])=\{x\in X: s<f(x)\le t\}$ 可测，并且 $f^{-1}(\{+\infty\})$ 与 $f^{-1}(\{-\infty\})$ 之一可测”

也等价。

- *)一般上说来，我们有如下的等价判别法：

设 $\mathcal{E}\subset\mathcal{P}(R^1)$，若 $\sigma(\mathcal{E})=\mathcal{B}(R^1)$，则下述条件与可测性等价：$f^{-1}(E)$ 可测（$\forall E\in\mathcal{E}$）并且 $f^{-1}(\{+\infty\})$ 与 $f^{-1}(\{-\infty\})$ 之一可测。

2. 可测函数的基本性质

(1) （整体可测性与局部可测性之间的关系）：

f 在 $X_1,X_2\in\mathcal{M}_{R^n}$ 上都可测 $\Rightarrow$ f 在 $X_1\cup X_2$ 上可测；

f 在 $X\in\mathcal{M}_{R^n}$ 上可测 $\Rightarrow$ 若 $E\subset X$ 且 $E\in\mathcal{M}_{R^n}$，则 f 在 E 上可测。

(2) （四则运算性质）：若 f、g：$X\to\overline{R}$ 可测，则 $f\pm g$、fg、f/g（分母不为零时）可测。

(3) （极限运算性质）：若$\{f_j\}$为一列 $\overline{R}$-值可测函数，则下列函数均可测

(i) $g_1(x)=\sup_j f_j(x)$；　(ii) $g_2(x)=\inf_j f_j(x)$；

(iii) $g_3(x)=\underline{\lim}_j f_j(x)$；　(iv) $g_4(x)=\overline{\lim}_j f_j(x)$。

证明提示：考虑$\{g_1>a\}$、$\{g_2<b\}$的可测性，$\underline{\lim}_j=\sup_{k\ge1}\inf_{j\ge k}$ 等。

(4) *)（复合运算性质）：若 f：$X\to R^1$ 为可测，g：$R^1\to R^1$ 为 Borel 可测（即：对任意 Borel 集 $B\subset R^1$，$g^{-1}(B)$ 也是 Borel 可测），则 $g\circ f$ 可测。

(5) （几乎处处意义下的性质）：

a). 几乎处处的概念：

- 设一个命题（可以是一个论断、一个不等式、一个恒等式等等）与点 x 有关，如果该命题除一个零测集外处处成立，则称该命题几乎处处成立。
- 符号表示：a.e.

b). 几乎处处意义下的性质：

- 若 f、g：$X\to\overline{R}$，f 可测，而 $f=g$（$a.e.$），则 g 也可测。
- 若每个 f_k：$X\to\overline{R}$ 可测，$f_k(x)\to f(x)$（$a.e.$），则 f 也可测。

…………

(6) 若干例子(I)

- $[a,b]$上单调函数必可测；
- 特征函数 χ_E 可测的充要条件为 E 可测；

- 简单函数$\varphi=\sum_{1\le k\le m} a_k\chi_{E_k}$可测的充要条件为：若$\sum_{1\le k\le m} a_k\chi_{E_k}$是标准形式，则其可测性等价于每个$E_k$可测；一般形式下，设$\varphi(X)=\{c_j\}_{1\le j\le l}$，则$\varphi$可测等价于每个$\varphi^{-1}(\{c_j\})$可测。
- 可测集 X 上的连续函数必可测。

(7) 若干例子(II)

- $f^{\pm}$、$|f|$的可测性。

  备注：（函数的分解）若f为$\overline{R}$-值的，我们有分解：$f=f^+-f^-$，其中$f^+=\max(f,0)$，$f^-=\max(-f,0)$。
- 例 4）设f为R^2上定义的实值函数，对固定的x，$f(x,y)$作为y的函数是连续的，对固定的y，$f(x,y)$作为x的函数是可测的，则f为R^2上的两元可测函数。
- （局部有界性）设$0<m(X)<+\infty$，f定义在X上可测，$0<f(x)<+\infty$（$a.e.$），则对任意$m(X)>\delta>0$，存在可测子集$E\subset X$及$k_0>0$，使得$m(X-E)<\delta$，$1/k_0<f(x,y)<k_0$（$\forall x\in E$）。

3. 可测函数的构造与逼近

(1). 简单函数刻画

可测函数的构造性定理：

a). 若f：$X\to\overline{R}$非负可测，则存在一可测简单函数列$\{\varphi_n\}$使得$\varphi_n\uparrow f$处处成立，并且在使得f为有界的任意可测集上一致收敛。

证明提示：关键在于构造函数列$\{\varphi_n\}$，可取：

$$\varphi_n=\sum_0^{2^{2n}-1}k2^{-n}\chi_{f^{-1}([k2^{-n},(k+1)2^{-n}))}+2^n\chi_{f^{-1}([2^n,\infty])}$$

注意：这个构造式子今后还将经常使用。

b). 一般实值情况下，存在一可测简单函数列$\{\varphi_n\}$使得$|\varphi_n|\uparrow$且$\varphi_n\to f$处处成立，并且在使得f为有界的任意可测集上一致收敛。

备注：若不考虑一致收敛，则上述结果中可要求简单函数列都是紧子集的（即函数值非零的点全体为有界集）

(2). 连续函数逼近

可测函数逼近的鲁津定理：

若f在$X\subset R^n$上处处有限、可测，则对任意$\delta>0$，存在X的闭子集F，满足$m(X-F)<\delta$，而f在$F\subset X$上连续。

§2　可测函数列的收敛概念与性质

1.　几种收敛概念

设可测函数 f 与可测函数列 $\{f_k\}_{k\geq 1}$ 都定义在可测集 $X\subset R^n$ 上。

(1) 几乎处处收敛：∃E∈ M，s.t. m(E) = 0，且 $f_n(x)\xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ 对所有 $x\notin E$ 成立，记为 $f_n\xrightarrow{a.e.} f$。

(2) 近一致收敛：∀ε>0，∃E∈ M，s.t. m(E) < ε，且，记为 $f_n\xrightarrow{近} f$。

(3) 依测度收敛：∀ε>0，$m\left(\{x\in X: |f(x)-f_n(x)|\geq\varepsilon\}\right)\xrightarrow{n\to\infty} 0$，记为 $f_n\xrightarrow{m} f$

(4) Cauchy 列：近-Cauchy 列、*a.e.*-Cauchy 列、m-Cauchy 列（依测度收敛 Cauchy 列）。

(5) 定义的合理性：极限在几乎处处意义下的唯一性。

*) 备注：

- L^1-收敛：f、$f_n\in L^1$(X, M, μ)，且 $\|f-f_n\|_{L^1}\xrightarrow{n\to\infty} 0$，记为 $f_n\xrightarrow{L^1} f$。
- L^1-Cauchy 列

(6) 例子：

(a) X=R，$f_n(x)=\frac{1}{n}\chi_{(0,n)}(x)$，$f=0$。

备注：$f_n\xrightarrow{近} f$、$f_n\xrightarrow{a.e.} f$、$f_n\xrightarrow{m} f$

(b) X=R，$f_n(x)=\chi_{(n,n+1)}(x)$，$f=0$。

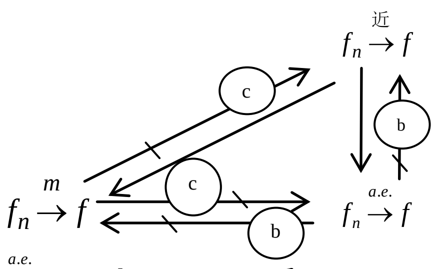
备注：$f_n\xrightarrow{a.e.} f$、$f_n -\times\xrightarrow{近} f$、$f_n -\times\xrightarrow{m} f$

(c) X = R，$f_n(x)=\chi_{[j2^{-k},(j+1)2^{-k})}(x)$（其中 $0\leq j<2^k$，$n=j+2^k$），$f=0$。

备注：$f_n\xrightarrow{m} f$、$f_n -\times\xrightarrow{近} f$、$f_n -\times\xrightarrow{a.e.} f$

2.　基本关系

(1)



(2) $f_n\xrightarrow{近} f \Rightarrow f_n\xrightarrow{a.e.} f$：∀ k =1,2,3,…，取 E_k∈ M，使得 m(E_k) ≤ 2^{-k} 而在 E_k^c 上 $f_n\xrightarrow{一致} f$，令 $E_0=\cap_{n\geq 1}\cup_{k\geq n} E_k$，则在 E_0^c 上 $f_n(x)\to f(x)$ 处处成立。

(3) $f_n\xrightarrow{近} f \Rightarrow f_n\xrightarrow{m} f$：按定义。

(4) 有关推不出的关系，反例常见前面的例子（见圆圈内标注的例子号）。

3. 进一步关系

(1) （Egoroff 定理） $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 且 m(X) < ∞ ⇒ $f_n \xrightarrow{近} f$ 。

证明提示：充分利用 $m(\cup_{s\geq n}\{x:|f_s(x)-f(x)|\geq 1/k\}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$。

(2) （Riesz 定理）$\{f_n\}$为 m-Cauchy 列 ⇒ 存在 M-可测函数 f，使得 $f_n \xrightarrow{m} f$ 且存在子列$\{f_{n_j}\}$，使得 $f_{n_j} \xrightarrow{a.e.} f$ 。

证明提示：关键是构造子列满足 $m(\{x: |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)| \geq 2^{-j}\}) \leq 2^{-j}$。

(3) **推论**： $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 且μ(X) < ∞ ⇒ $f_n \xrightarrow{m} f$ 。（由(3)推出）

(4) **推论**： $f_n \xrightarrow{m} f$ ⇒存在子列$\{f_{n_j}\}$，使得 $f_{n_j} \xrightarrow{近} f$ 。

备注：

- 该推论已蕴含在上述 Riesz 定理的证明之中。
- 事实上，我们有更进一步的结果： $f_n \xrightarrow{m} f$ ⇔ 对任意子列$\{f_{n_j}\}$，都存在子列$\{f_{n_{j_k}}\}$，使得 $f_{n_{j_k}} \xrightarrow{近} f$ 。

“⇒”之证明提示：只要证明 $f_n \xrightarrow{m} f$ ⇒存在子列$\{f_{n_k}\}$，使得 $f_{n_k} \xrightarrow{近} f$ 。为此，只要取子列$\{f_{n_k}\}$满足

$$m(\{x:|f_{n_k}(x)-f(x)|\geq 1/k\}) \leq 2^{-k}。$$

此时，∀δ>0，可取

$$F_\delta = \cup_{k>\log_2(1/\delta)+1}\{x:|f_{n_k}(x)-f(x)|\geq 1/k\},$$

则 $m(F_\delta) < \delta$，但在 F_δ^c 上 $f_{n_k} \xrightarrow{一致} f$ 。

(5) **思考题**：在条件“$|f_n| \leq g \in L^1$”下，或在条件“$m(X)<\infty$”下，讨论前面三种收敛性之间的关系。

第三部分 勒贝格积分

§1 积分的定义及其基本性质

§§1.1 定义

设 $f:E\to\overline{R^1}$ 为可测函数，E 为可测集。

(1) 若 $f=\sum_1^n a_j\chi_{E_j}$ 为非负可测简单函数（标准形式），则定义 f 的积分为

$$\int_E f(x)dx=\sum_1^n a_j m(E_j)。$$

(2) 若 f 为非负可测函数，则定义 f 的积分为

$$\int_E f(x)dx=\sup\{\int_E \varphi(x)dx:0\le\varphi\le f，\varphi\text{为简单函数}\}。$$

(3) 若 f 为 $\overline{R}$ 值可测函数，且 $\int_E f^+(x)dx$ 与 $\int_E f^-(x)dx$ 中至少有一个有限，则定义 f 的积分为

$$\int_E f(x)dx=\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx$$

(4) 若 $\int_E f(x)dx$ 有限，则称 f 可积。E 上可积函数全体记为 $L^1(E)$ 或 $L(E)$。

§§1.2 基本性质

(1) （非负简单函数积分的等价定义） 若非负可测简单函数 $f=\sum_1^n a_j\chi_{E_j}$ 不一定是标准形式，则仍然有 $\int_E f(x)dx=\sum_1^n a_j\mu(E_j)$。

证明提示： 可直接证明非负可测简单函数的积分具有可加性以及（都为标准形式）

$$\varphi+\psi=\sum_1^n a_j\chi_{E_j}+\sum_1^m b_i\chi_{F_i}=\sum_k c_k\chi_{\cup_{(i,j):a_j+b_i=c}F_i\cap E_j}，\text{其中}\{c_k\}=(\varphi+\psi)^{-1}(R)。$$

注： 由这个性质可知，对于非负简单函数 $f=\sum_1^n a_j\chi_{E_j}$，即使它不是标准形式，我们仍然可以用 $\int_E f(x)dx=\sum_1^n a_j\mu(E_j)$ 来定义其积分，定义的合理性（即积分值与简单函数的表达形式无关）由这个性质就可以保障。

(2) 若 f 与 g 为 $\overline{R}$ 值可测函数，且 $f\le g$，则 $\int_X f(x)d\mu(x)\le\int_X g(x)d\mu(x)$。

(3) （非负可测函数积分的等价定义）若 f 为非负可测函数，则对任意非负可测简单函数列 $\{\varphi_n\}$，若 $\varphi_n\uparrow f$ 几乎处处成立，则

$$\int_E f(x)dx=\lim\int_E \varphi_n(x)dx。$$

证明提示： 证明"≤"时需要：若 φ 为可测简单函数，则 $\mu_\varphi(E)=\int_E\varphi(x)d\mu(x)$ 为一测度。在此基础上考虑：$\int_X\varphi_n\ge\alpha\int_{\varphi_n\ge\alpha\varphi}\varphi$，其中 $0<\alpha<1$，$0\le\varphi\le f$。

注： 由这个性质可知，对于非负可测函数 f，可任取非负可测简单函数列 $\{\varphi_n\}$，满足 $\varphi_n\uparrow f$ 几乎处处成立，然后用 $\int_E f(x)dx=\lim\int_E\varphi_n(x)dx$ 来定义其积分，定义的合理性（即

积分值与满足条件的单调上升简单函数列的取法无关）由这个性质就可以保障。

(4) f 可积当且仅当：$|f|$可积。

(5) $L^1(E)$为一线性空间，积分算子为其上的一个线性泛函满足

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \le \int_E |f(x)|dx\text{。}$$

证明提示：先得到 $L^1(E)$关于正线性运算的封闭性及积分算子的正线性性，再得到 $L^1(E)$关于一般线性运算的封闭性及积分算子的一般线性性。

(6) (i) 若 f 为非负可测函数，则 $\int_E f(x)dx = 0$ 当且仅当：$f(x)=0$（$a.e.$）。

(ii) 若 f、$g\in L^1(E)$，则 $\int_F f(x)dx = \int_F g(x)dx$（$\forall F\in$ M, $F\subset E$）$\Leftrightarrow$ $\int_E |f(x)-g(x)|dx = 0$ $\Leftrightarrow$ $f(x)=g(x)$（$\mu-a.e$）。

(iii) 若 $f\in L^1(E)$，则 $\{x: f(x)\neq 0\}$ 为σ-有限，$\{x:|f(x)|=\infty\}$ 为零测集。

*) **备注：**在 L^1(E)中，引进等价关系："$f\cong g$" 当且仅当 "$f\overset{a.e.}{=}g$"，令

$$\overline{L}^1(\mathrm{E}) = L^1(\mathrm{E})/\cong =: \{\overline{f} : f\in L^1(\mathrm{E})\}$$

$$\left\|\overline{f}\right\|_{L^1} =: \int_E |f(x)|dx$$

其中 $\overline{f}$ $=\{g\in L^1(\mathrm{E}): f\cong g\}$，则有

(7) *)（$\overline{L}^1$(E)，$\|\cdot\|_{L^1}$）为一线性赋范空间，积分为其上的有界线性泛函。

备注：通常人们仍用 L^1(E)来记 $\overline{L}^1$(E)，而在 L^1(E)中把几乎处处相等的函数看成同一个函数。

§2 三大基本收敛定理

§§2.1 三大基本收敛定理

Levi 单调收敛定理：

若$\{f_n\}$为一列非负可测函数，$f_n\uparrow f$ 几乎处处成立，则 f 也非负可测且

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx\text{。}$$

"≤"之证明提示： ∀可测简单函数$\varphi\le f$，考虑$\int_E f_n \ge \alpha\int_{f_n\ge\alpha\varphi}\varphi$，其中 0<α<1

备注：

(i) （级数形式）若$\{f_n\}$为一列非负可测函数，$f=\sum f_n$，则 f 非负可测且 $\int_E f(x)dx = \sum \int_E f_n(x)dx$。

(ii) （积分关于定义域的可数可加性）若 f 为一非负可测函数，则 $\mu_f(F) = \int_F f(x)dx$（$F\subset E$）为(X, M_E)上的一个测度。

(iii) （积分的绝对连续性）若 f 为一可积函数，则 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当可测集 $e\subset E$ 满足 $m(e)<\delta$ 时，有$\left|\int_e f(x)dx\right|<\varepsilon$。

Fatou 引理：

若$\{f_n\}$为一列非负可测函数，则 $f(x) =: \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$（a.e.）也非负可测且

$$\int_E f(x)dx \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx\text{。}$$

证明提示：利用 $\int \inf_{j\ge k} f_j \le \inf_{j\ge k}\int f_j$。

备注：Fatou 引理中的不等号有可能成立，例子如下

在 $[0,1]$ 上考虑 $f_k = k\chi_{[0,1/k]} \xrightarrow{a.e.} f\equiv 0$。

Lebesgue 控制收敛定理：

若 $\{f_n\}\subset L^1(E)$ 满足 (i) $f_n\to f$ 几乎处处成立，(ii) 存在非负可测函数 G 使得 $\forall n$，$|f_n(x)|\le G(x)$ 几乎处处成立，则 $f\in L^1(E)$ 且

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx\text{。}$$

证明提示：对 $G\pm f_j$ 应用 Fatou 引理。

备注与例子：

(i)　（逐项积分定理）　若 $\{f_n\}\subset L^1(E)$ 满足 $\sum\int_E |f_n(x)|dx<\infty$，则 $\sum f_n(x)$ 几乎处处收敛于某个 $L^1(E)$ 函数 f，且

$$\int_E f(x)dx = \sum\int_E f_n(x)dx\text{。}$$

(ii)　$\{E_k\}_{1\le k\le n}$ 为 $[0,1]$ 中可测集列，$[0,1]$ 中每个点至少属于上述集合中的 m 个，则 $\{E_k\}_{1\le k\le n}$ 中至少有一个测度大于或等于 m/n.

(iii)　$\int_{[a,+\infty)}\frac{xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}dx = o(\frac{1}{n^2})$　（$a>0$）。

提示：考虑 $\int_{[a,+\infty)}\frac{n^2xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}dx=\int_{[0,+\infty)} f_n(u)du$，$f_n(u)=\frac{\chi_{[na,+\infty)}(u)ue^{-u^2}}{1+u^2/n^2}\le ue^{-u^2}$。

§§2.2　带参变量积分

带参变量积分的连续性：

设 $f(x,t)$ 定义在 $E\times(a,b)$ 上，它作为 x 的函数在 E 上可积，作为 t 的函数在 (a,b) 上连续，若存在 $F\in L(E)$，使得

$$|f(x,t)|\le F(x)\quad(\forall (x,t)\in E\times(a,b)),$$

则

$$\lim_{t\to t_0}\int_E f(x,t)dt=\int_E f(x,t_0)dt\text{。}$$

带参变量积分的可导性：

设 $f(x,t)$ 定义在 $E\times(a,b)$ 上，它作为 x 的函数在 E 上可积，作为 t 的函数在 (a,b) 上可导，若存在 $F\in L(E)$，使得

$$|\partial_t f(x,t)|\le F(x)\quad(\forall (x,t)\in E\times(a,b)),$$

则

$$\frac{d}{dt}\int_E f(x,t)dt=\int_E \partial_t f(x,t)dt\text{。}$$

*) **备注：带参变量积分的可积性**：将在 Fubini 定理中介绍。

§3　积分的进一步性质

§§3.1　连续函数逼近

L^1 的稠密性定理：

(1) 若 $f\in L^1(E)$，则对任意ε>0，都存在一个可测简单函数φ∈ $L^1(E)$，使得 $\|f-\varphi\|_{L^1}<\varepsilon$。

(2) 若 $f\in L^1(E)$，则对任意ε>0，存在一个 R^n 上的紧支集连续函数 φ，使得 $\|f-\varphi\|_{L^1(E)}<\varepsilon$。

备注：

(i) （积分的平均连续性）设 $f\in L^1(R^n)$，则

$$\int_{R^n}|f(x+h)-f(x)|dx\xrightarrow{h\to 0}0。$$

(ii) 设 $f\in L^1(E)$，则存在 R^n 上的紧支集连续函数 $\{g_k\}$，使得

- $\int_E|f(x)-g_k(x)|dx\xrightarrow{k\to\infty}0$；
- 在 E 上，$g_k(x)\xrightarrow{a.e.}f(x)$。

(iii) 设 $f\in L^1([a,b])$，则存在紧支集在(a,b)内的连续函数 $\{g_k\}$，使得

- $\int_{[a,b]}|f(x)-g_k(x)|dx\xrightarrow{k\to\infty}0$；
- 在[a,b]上，$g_k(x)\xrightarrow{a.e.}f(x)$。

§§3.2 R^n 上微分同胚下的变量替换公式

<u>设</u>： $(R^n, \mathscr{M}_{R^n}, m_{R^n})$-------- R^n 上的 Lebesgue 测度空间
Ω、G(Ω)------------- R^n 中的开集　　G：Ω → G(Ω)------一个同胚映射
D_xG-------------------$(\partial g_i/\partial x_j(x))_{n\times n}$　　dx
$\|x\|$---------------------$\max_{1\le j\le n}|x_j|$，其中 $x\in R^n$
$\|T\|$-------------------- $\max_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le n}|T_{ij}|$

<u>**定理**</u>（定理7，p.300）：在上述约定下，若 G 为 C^1-微分同胚，则有

(1) 若 $E\subset\Omega$，且 $E\in\mathscr{M}_{R^n}$，则 $G(E)\in\mathscr{M}_{R^n}$ 且

$$m_{R^n}(G(E)) = \int_E|\det(D_xG)|\,dx$$

(2) 若 f 为上的非负 Lebesgue 可测函数或 $f\in L^1(G(\Omega), \mathscr{M}_{R^n}, m_{R^n})$，则

$$\int_{G(\Omega)}f(y)dy=\int_\Omega f\circ G(x)\,|\det(D_xG)|\,dx$$

证明要点：

(2)公式中Ω与 G(E)地位对称，因此只要证明单向不等式"≤"就行。

所以，(1)也只需证明"≤" 就行。

而对于后者，只要证明：

$$\mu(E) =: m_{R^n}(G(E)) \le \int_E |\det(D_xG)|\,dx。$$

而上式又归结为对 E 为方体加以证明就行。

备注： 上述公式的改进与 Sard 定理介绍。

§§3.3 R^n 上极坐标下的变量替换公式介绍

<u>**设**</u>：

$(R^n, \mathscr{M}_{R^n}, m_{R^n})$-------- R^n 上的 Lebesgue 测度空间
Φ：$R^n-\{0\}\to(0,\infty)\times S^{n-1}$: $x\mapsto rx'$，其中 $r=|x|$，$x'=x/|x|$

$\rho(E) = \int_E r^{n-1}dr$，其中 $E \subset (0,\infty)$

$\sigma(F) \equiv \sigma_{n-1}(F) = n\, m_{R^n}(\{rx'\colon 0<r\le 1, x\in F\})$，其中 $F \subset S^{n-1}$

定理（例 1，p.300）：在上述约定下，若 f 为 R^n 上非负 Lebesgue 可测函数或 $f \in L^1(R^n, \mathscr{M}_{R^n}, m_{R^n})$，则有

$$\int_{R^n} f(x)dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(rx')r^{n-1}d\sigma(x')dr\ 。$$

若干应用（细节略）：

包括 $|x|^{-a}$ 在原点附近及∞附近的可积性、Γ-函数、单位球体积计算公式、单位球面面积计算公式、Riemann 流形上的积分等。

§§3.4 Fubini 定理

Fubini-Tonelli 定理：

(a) （Tonelli）若 f 在 $R^n \times R^m$ 上非负可测，则

对 a.e. $x\in R^n$，f_x 可测　　对 a.e. $y\in R^m$，f^y 可测

进而，函数

$g(x) = \int_{R^m} f_x(y)dy$ 非负可测　　$h(y) = \int_{R^n} f^y(x)dx$ 非负可测

并且

$$\int_{R^n\times R^m} f(x,y)dxdy = \int_{R^m} h(y)dy = \int_{R^n} g(x)dx$$

(b) （Fubini）若 $f\in L^1(R^n \times R^m)$，则

对 a.e. $x\in R^n$，f_x 可测且 $f_x\in L^1(R^m)$

对 a.e. $y\in R^m$，f^y 可测且 $f^y\in L^1(R^n)$

而 $g(x) \in L^1(R^n)$，$h(y) \in L^1(R^m)$，并且(a)中的等式成立。

*) **(b)易从(a)中推出。**

*) **(a)之证明要点：** 只要对 $f=\chi_E$ 证明(iii)成立，即：若 E 为 $R^n \times R^m$ 中的可测集，则

对 a.e. $x\in R^n$，E_x 为可测（即，f_x 为可测）

对 a.e. $y\in R^m$，E^y 为可测（即，f^y 为可测）

而 $m_{R^m}(E_x)$、$m_{R^n}(E^y)$ 为可测，且

$$m_{R^n\times R^m}(E) = \int_{R^n} m_{R^m}(E_x)dx = \int_{R^m} m_{R^n}(E^y)dy\ 。$$

$$\begin{tikzcd}
\text{矩形} \arrow[r] \arrow[d] & \text{开集} \arrow[r] & \text{闭集} \arrow[r] & \text{可测集} \\
\text{零测集} \arrow[urrr] & & &
\end{tikzcd}$$

几个例子：

1. （例 1，p.211）$\int_0^{+\infty} \sin ax(\int_0^{+\infty} f(y)e^{-xy}dy)dx = a\int_0^{+\infty}\frac{f(y)}{a^2+y^2}dy$.

注意： $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin axdx = \frac{a}{a^2+y^2}$

$2^{-1}\left|\int_u^v e^{-xy}\sin axdx\right| \le 1/a$ （积分第二中值定理）（$u,v>0$）

$\int_u^v \sin ax(\int_0^{+\infty} f(y)e^{-xy}dy)dx = \int_0^{+\infty} f(y)(\int_u^v \sin axe^{-xy}dx)dy$ （Fubini 定理）

最后用控制收敛定理。

2. （例 2，p.212）$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$.

注意： $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}dy\right)dx = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}dx\right)dy$

左 $=\pi/4$

右 $=\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$

§§3.5　Lebesgue 积分与 Riemann 积分的比较介绍

定义方式之间的比较：

以 $[0,1]$ 上有界函数的积分为例：

- 一是对定义域做分划，另一是对值域做分划
- 一是用阶梯函数做逼近，另一是用可测简单函数做逼近

定理（定理 4.9，p.140；例 6，p.141） 设 f 为可测集 $E\subset R^n$ 上定义的几乎处处有限的非负可测函数，$m(E)<+\infty$，在上做分划 $\Delta:0=y_0<y_1<\cdots<y_k<y_{k+1}<\cdots\to+\infty$，使得 $\|\Delta\|=\sup_{k\ge0}(y_{k+1}-y_k)<+\infty$，令 $E_k=f^{-1}([y_k,y_{k+1}))$。我们有

（1） $f\in L^1(E)\iff L_\Delta(f)=\sum_{k\ge0}y_k m(E_k)<+\infty$；

（2） $\lim_{\|\Delta\|\to0}L_\Delta(f)=\int_E f(x)dx$；

（3） $f\in L^1(E)\iff \sum_{k\ge0}m(f^{-1}([k,+\infty]))<+\infty$。

可积函数类之间的比较：

以 $[0,1]$ 上有界函数的积分为例：

- 一是几乎处处连续，另一是可测
- 广义 Riemann 可积与 Lebegue 可积没有包含关系

定理（定理 4.24，p.172）若 f 为 $I=\prod_{1\le k\le n}[a_k,b_k]$ 上定义的有界函数，则 f 在 I 上 Riemann 可积的充要条件为 f 在 I 上几乎处处连续。

备注： 证明的关键在于

- “f 在 $x\in I$ 点连续” $\iff$ “$\omega(x)=0$”，其中 ω 为 f 在 I 上的振幅函数，即
$$\omega(x)=\lim_{r\to+0}\sup_{y,z\in B(x,r)\cap I}|f(y)-f(z)|。$$
- $\int_I\omega(x)dx=\overline{\int_I} f(x)dx-\underline{\int_I} f(x)dx$　（Darboux 上下积分之差）。
- 实际证明时，为简单起见，可按上述思路但通过单调分划列来处理：
Δ_k：对每条边做 2^k 等分所得到的分划。它所对应的振幅、达布大和与小和满足 $\int_I\omega_{\Delta_k}(x)dx=S_{\Delta_k}(f)-s_{\Delta_k}(f)$，取极限即可。注意：除了分划等分网格面上的点之外，$\lim_{k\to\infty}\omega_{\Delta_k}(x)=0$ 等价于 $\omega(x)=0$。

积分与积分以及积分与极限次序交换问题的比较：

- 一是一般需要一致收敛，另一有三大收敛定理
- 一是一般需要两元连续，另一则有 Fubini 定理

关于 Riemann 积分的三大收敛定理与积分交换定理（具体表述此略，作为练习）

- Levi 型收敛定理：
- Fatou 型收敛定理：
- Lebesgue 型控制收敛定理：
- Fubini 型积分次序交换定理：

§§3.6 L^p 空间介绍

定义：

$$L^p(E)=\left\{f:\|f\|_{L^p}<+\infty\right\}$$

$$\|f\|_{L^p}=\begin{cases}\left(\int_E |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} & 0<p<+\infty\\ \inf_{m(F)=0,F\subset E}\sup_{x\in E-F}|f(x)| & p=+\infty\end{cases}$$

基本性质：

- $L^p(E)$ 为一线性空间
- 当 $1\le p\le+\infty$ 时，$\|f\|_{L^p}$ 为一范数
- Hölder 不等式与 Minkowskii 不等式
- 完备性
- $L^p(E)$ 收敛与几乎处处收敛、近一致收敛、依测度收敛之间的关系。

微分与不定积分

微积分基本定理的两种表达形式回顾：

积分形式------牛顿-莱布尼茨公式

微分形式------勒贝格微分定理

§1　有界变差函数

§§1.1　定义

- 定义：设 f 为 $[a,b]$ 上定义的实值函数，f 为有界变差函数的定义、总变差的定义；符号 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$、$\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$、$BV[a,b]$ 等。
- 例子：i).　有界闭区间上的单调函数都是有界变差函数。

  ii).　曲线长度：曲线 $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$　$(t\in[\alpha,\beta])$ 可求长的充要条件为 φ,ψ 都是 $[\alpha,\beta]$ 上的有界变差函数。

  iii).　振荡函数　$f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ x^{\alpha}\sin x^{-1} & 0<x\le 1 \end{cases}$　（$\alpha>1$）。该函数的局部极值点为 $\{x_k=(k\pi+\frac{1}{2}\pi)^{-1}:k\ge 0\}$，所以总变差约为

$$\sum_{k\ge 0} {x_k}^{\alpha} \cong \sum_{k\ge 0}\tfrac{1}{k^{\alpha}}<\infty 。$$

§§1.2　基本性质

- $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ 关于限具有可加性。
- $BV[a,b]$ 中函数均为有界函数。
- $BV[a,b]$ 关于线性运算与乘积运算具有封闭性。
- Jordon 分解：有界变差函数可分解为两个单调上升函数的差。

§§1.3　可导性

- 勒贝格定理：设 f 在 $[a,b]$ 上单调上升，我们有
  - a)　f 在 $[a,b]$ 上几乎处处可导；
  - b)　$f' \in L([a,b])$；
  - c)　$\int_a^b f'(x)dx \le f(b)-f(a)$。

  备注：这个定理的证明放到后面单独处理。
- 设 $f\in BV[a,b]$，我们有

(1) f 在$[a,b]$上几乎处处可导；

(2) $f' \in L([a,b])$；

(3) $\frac{d}{dx}\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)=\left|f'(x)\right|$几乎处处成立。

备注：(3)的证明放到后面单独处理。

§2 绝对连续函数

§§2.1 定义

- 定义：设 f 为$[a,b]$上定义的实值函数，f 为绝对连续函数的定义。
- **备注：**
  - 定义的等价表述：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得对$[a,b]$中任何一列互不相交的区间族$\{(a_k,b_k)\}_k$，若$\sum_k(b_k-a_k)<\delta$，则
  $$\sum_k\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\varepsilon。$$
  - 若 f 在$[a,b]$上绝对连续，则 f 一定一致连续、有界变差，从而一定几乎处处可导，并且 $f' \in L[a,b]$。
- 例子：(i). Lipschitz 函数一定是绝对连续函数，特别地，$C^1([a,b])$-函数一定是绝对连续函数。所谓 Lipschitz 函数是指满足下述条件的函数：存在正数 M，使得对一切 $x,y\in[a,b]$，都有
  $$\left|f(x)-f(y)\right|\le M\left|x-y\right|。$$
  (ii). 若 $f\in L[a,b]$，则根据积分的绝对连续性性质，$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 为绝对连续函数。**（备注：根据后面的知识我们将会知道，此时实际上有 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(F)=\int_a^b\left|f(t)\right|dt$。）**

  (iii). $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ x^\alpha\sin x^{-1} & 0<x\le 1\end{cases}$ （$\alpha>1$）。由于当 $\alpha>1$ 时 $f'\in L[0,1]$，所以 f 绝对连续。

§§2.2 性质

- 绝对连续函数的牛顿-莱布尼茨公式：F 在$[a,b]$上绝对连续的充要条件是存在 $f\in L[a,b]$，使得 $F(x)=F(a)+\int_a^x f(t)dt$，并且 $F'(x)=f(x)$几乎处处成立。

事实上，上述定理可由下述结论推出

(1) 若 F 在$[a,b]$上绝对连续且 $F'(x)=0$（a.e.），则 $F(x)$为一常数。

备注：这个结果留待后面证明。

(2) 若 $f\in L[a,b]$，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 绝对连续且 $F^{/}(x)=f(x)$ 几乎处处成立。

备注：这个结果可通过下述极限而得到

$$\int_a^b\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt-f(x)\right|dx\to 0\text{。}$$

(3) 若 F 在 $[a,b]$ 上绝对连续，则

$$F(x)=F(a)+\int_a^x F^{/}(t)dt\text{。}$$

备注：

- 上式即为牛顿-莱布尼茨公式。
- 若 F 在 $[a,b]$ 上处处可导并且 $F^{/}\in L[a,b]$，则

$$F(x)=F(a)+\int_a^x F^{/}(t)dt\text{。}$$

- 若 F 在 $[a,b]$ 上绝对连续，则 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(F)=\int_a^b\left|F^{/}(t)\right|dt$。

备注：由**定义**及**牛顿-莱布尼茨**公式，$\overset{b}{\underset{a}{V}}(F)\le\int_a^b\left|F^{/}(t)\right|dt$ 显然。而由总变差定义及牛顿-莱布尼茨公式易得 $\frac{d}{dx}(V_a^x(F))\ge\left|F^{/}(x)\right|$，于是有

$$\int_a^b\left|F^{/}(x)\right|dx\le\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\overset{x}{\underset{a}{V}}(F)\right)dx\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(F)-\overset{a}{\underset{a}{V}}(F)=\overset{b}{\underset{a}{V}}(F)\text{。}$$

§§2.3 积分的描述性定义

- 牛顿积分：

a) 若 F 在 $[a,b]$ 上处处可导并且 $F^{/}(x)=f(x)$，则 $F(b)-F(a)$ 定义为 f 在 $[a,b]$ 上牛顿积分，记之为 $(N)\int_a^b f(x)dx$。若存在满足条件的 F，则称 f 在 $[a,b]$ 上牛顿可积。

b) 这个定义是合理的，即 $(N)\int_a^b f(x)dx$ 与 F 的取法无关。

c) “ f 在 $[a,b]$ 上牛顿可积” 与 “ f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积” 互不包含。反例：

(i). $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 在 $[-1,1]$ 上黎曼可积但非牛顿可积。

(ii). 设 $F(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ x^{3/2}\sin x^{-1} & 0<x\le 1\end{cases}$，则 $f(x)=F^{/}(x)$ 在 $[0,1]$ 上牛顿可积但无界从而非黎曼可积。

备注：牛顿积分定义的一个重要理论基础是：

若 F 在 $[a,b]$ 上处处可导并且 $F^{/}(x)=0$，则 $F(x)$ 为常数。

- 广义牛顿积分：

a) 若 F 在 $[a,b]$ 上连续，并且除可数个点外处处可导并且 $F^{/}(x)=f(x)$，则 $F(b)-F(a)$ 定义为 f 在 $[a,b]$ 上广义牛顿积分，记之为 $(N)\int_a^b f(x)dx$。若存在满足条件的 F，则称 f 在 $[a,b]$ 上广义牛顿可积。

b) 这个定义是合理的，即 $(N)\int_a^b f(x)dx$ 与 F 的取法无关。

备注： 牛顿积分定义的一个重要理论基础是：

若 F 在 $[a,b]$ 上连续并且除可数个点外处处可导且

$F^{/}(x)=0$，则 $F(x)$ 为常数。

- L-积分：

a) 若 F 在 $[a,b]$ 上绝对连续，并且除一零测集外处处可导并且 $F^{/}(x)=f(x)$，则 $F(b)-F(a)$ 定义为 f 在 $[a,b]$ 上的勒贝格积分，记之为 $(L)\int_a^b f(x)dx$。若存在满足条件的 F，则称 f 在 $[a,b]$ 上勒贝格可积。

b) 这个定义是合理的，即 $(N)\int_a^b f(x)dx$ 与 F 的取法无关。

备注：

(i). 勒贝格积分描述性定义的一个重要理论基础是：

若 F 在 $[a,b]$ 上绝对连续并且除一零测集外处处可导

且 $F^{/}(x)=0$，则 $F(x)$ 为常数。

(ii). 勒贝格积分的描述性定义等价于标准定义下的勒贝格积分。

- 广义 Denjoy 积分：

这里不细描述了。

§3 Lebesgue 微分定理

备注：勒贝格微分定理是实变函数课程中证明难度最大（至少是最大之一），本节将特别尽量把思路讲清楚，让学生容易理解掌握。

§§3.1 Vitali 引理

- Vitali 覆盖：设 $E\subset R$，$\Im=\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为一组区间。若 $\forall x\in E$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists I_{\alpha_{x,\varepsilon}}\in\Im$，使得 $x\in I_{\alpha_{x,\varepsilon}}$ 且 $\left|I_{\alpha_{x,\varepsilon}}\right|<\varepsilon$，则称 $\Im$ 为 E 的一个 Vitali 覆盖。

备注： Vitali 覆盖举例

$$E=[0,1], \quad I_{r,m}=[r-\tfrac{1}{m},r+\tfrac{1}{m}], \quad \{I_{r,m}\}_{m\ge1,r\in Q\cap[0,1]}。$$

Vitali 引理：设 $E\subset R$，$m^*(E)<\infty$，$\Im=\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 E 的一个 Vitali 覆盖，则存在互不相交的 $\{I_k\}_{k\ge1}\subset\Im$，使得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists n_\varepsilon$ 满足

$$m^*(E-\cup_{1\le k\le n_\varepsilon}I_k)<\varepsilon。$$

讨论：

a) Vitali 引理中，实际上互不相交的无限子族 $\{I_k\}_{k\ge1}$，满足 $m^*(E-\cup_{k\ge1}I_k)=0$。

留作课外思考讨论题。

b) 一般覆盖引理介绍：在积分的微分定理的研究中，各种各样的覆盖引理（定理）起着十分重要的作用。可参见 Guzman 的《Differentiation of Integral of Functions》。作为课外选学资料。

§§3.2 单调函数的可导性

Lebesgue 定理：若 f 在 $[a,b]$ 上单调上升，则 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处可导，且 $\int_{[a,b]}f'(x)dx\le f(b)-f(a)$。

讨论：

a) Dini 导数：

$$D^+f(x)=\overline{\lim}_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad D_+f(x)=\underline{\lim}_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$D^-f(x)=\overline{\lim}_{h\to0+}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \qquad D_-f(x)=\underline{\lim}_{h\to0+}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

称为 f 在 x 点的右上、右下、左上、左下 Dini 导数。

备注：f 在 x 点可导的充要条件为这四个 Dini 导数相等。

b) Dini 导数举例：

设 $0<a<b, 0<a'<b'$，定义函数

$$f(x)=\begin{cases} ax\sin^2\frac{1}{x}+bx\cos^2\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x=0 \\ a'x\sin^2\frac{1}{x}+b'x\cos^2\frac{1}{x} & x<0 \end{cases},$$

则有 $D_+f(0)=a$，$D_-f(0)=a'$，$D^+f(0)=b$，$D^-f(0)=b'$。

Fubini 逐项微分定理：设每个 f_n 在 $[a,b]$ 上都是单调上升的，而且 $f=\sum_{n\ge1}f_n$ 在 $[a,b]$ 上处处收敛，则 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微并且 $f'(x)=\sum_{n\ge1}f_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处成立。

定理：设 f 在 $[a,b]$ 上绝对连续，且 $f'(x)$ 几乎处处为 0，则 f 为常数。

定理：设 f 在 $[a,b]$ 上有界变差，则 $\frac{d}{dx}\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)=|f'(x)|$ 几乎处处成立。

备注：这个定理当函数绝对连续时证明容易。一般情况证明参见书本，此略。

讨论：

a) Lebesgue 定理中的不等式 $\int_{[a,b]} f'(x)dx \le f(b)-f(a)$ 是不可改进的。

- 举例：
  - 首先举一个单调上升函数使得等式不成立；
  - 然后要求举一个单调上升但是连续的例子。
  - 上述例子不是严格单调的，再要求举一个连续且严格单调的函数。

    这个反例留作课外练习思考讨论。

- 利用 Fubini 逐项求导定理构造函数举例：

  介绍一个严格单调、导数几乎处处为零的函数。设

  $$(a,b)\cap Q=\{r_n\}_{n\ge 1}，记\ f_n(x)=\begin{cases}0 & a\le x<r_n\\ 1 & r_n\le x\le b\end{cases},$$

  则

  $$f(x)=\sum_{n\ge 1}2^{-n}f_n(x)$$

  在 $[a,b]$ 上严格单调，导数几乎处处为零。

- 任给一个零测集 $E\subset[a,b]$，可以构造 $[a,b]$ 上一个连续递增函数，它在 E 上的导数处处为 $+\infty$。

  备注：任取开集 $G_n\supset E$，使得 $m(G_n)<2^{-n}$，取

  $$f=\sum_{n\ge 1}f_n，其中\ f_n(x)=m([a,x]\cap G_n)。$$

b) Lebesgue 定理中的不等式 $\int_{[a,b]} f'(x)dx \le f(b)-f(a)$ 什么时候等式成立，这就是 Lebesgue 积分意义下的牛顿-莱布尼茨公式。

c) 作业：

- Vitali 引理中，实际上可选互不相交的无限子族 $\{I_k\}_{k\ge 1}$，使得 $m^*(E-\cup_{k\ge 1}I_k)=0$。
- 构造一个连续且严格单调的函数，使得 $\int_{[a,b]} f'(x)dx \le f(b)-f(a)$。中等式不成立。
- 查找资料，写一份函数连续但不可微的小报告。

§§3.2 Lebesgue 微分定理

Lebesgue 微分定理： 设 $f\in L^1[a,b]$，我们有

a) 对几乎所有的 $x\in[a,b]$，$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$；

b) 对几乎所有的 $x \in [a,b]$，$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt = 0$。

备注：满足上式的点 x 称为 f 的 Lebesgue 点。

第四次讲座：

浅谈微积分基本定理

说明： 在这个讲座中，我们先简单介绍微积分基本定理的两种表达形式：积分形式——就是牛顿-莱布尼茨公式，以及微分形式——就是勒贝格微分定理。然后重点介绍微分形式的高维推广，以及与此相关的一系列国际公开数学问题，引导学生接触前沿研究。这个讲座也只是参考性的，具体 ppt 文档另文处理（见附件材料）。

若干证明细节：

覆盖引理的证明概要：

(1). 先对 Vitali 覆盖作技术性处理：任取开集 $G \supset E$ 满足 $m(G) < +\infty$，并且不妨设 $\mathscr{I}$ 中的区间都是闭区间。令

$$\mathscr{I}_0 = \{I \in \mathscr{I} : I \subset G\},$$

则 $\mathscr{I}_0$ 仍然是 E 的一个 Vitali 覆盖。记

$$\delta_0 = \sup\{|I| : I \in \mathscr{I}_0\}，\text{它必然} \le m(G) < +\infty。$$

(2). 取区间族：取一区间 $I_1 \in \mathscr{I}_0$ 使得 $|I_1| > \delta_0/2$（即 I_1 取得尽可能大），记

$$\mathscr{I}_1 = \{I \in \mathscr{I}_0 : I \cap I_1 = \varnothing\}，\quad \delta_1 = \sup\{|I| : I \in \mathscr{I}_1\},$$

则 $\delta_1 < +\infty$，第一次被扔掉的区间 I $(\in \mathscr{I}_0 - \mathscr{I}_1)$ 必定含在 $5I_1$ 中。若 $m^*(E - I_1) = 0$，则引理证毕；若不然，再取 $I_2 \in \mathscr{I}_1$ 使得 $|I_2| > \delta_1/2$（即 I_2 取得尽可能大），记

$$\mathscr{I}_2 = \{I \in \mathscr{I}_1 : I \cap I_2 = \varnothing\}，\quad \delta_2 = \sup\{|I| : I \in \mathscr{I}_2\},$$

则 $\delta_2 < +\infty$，第二次被扔掉的区间 I $(\in \mathscr{I}_1 - \mathscr{I}_2)$ 必定含在 $5I_2$ 中。

继续上述过程，便得一列区间 $\{I_k\}_{k\ge 1}$，满足：

- $\{I_k\}_{k\ge 1}$ 互不相较；从而 $\sum_{k\ge 1}|I_k| < m(G) < +\infty$；

- 第 k 次被扔掉的区间 I $(\in \mathscr{J}_{k-1}-\mathscr{J}_k)$ 必定含在 $5I_k$ 中。

(3). 结论证明：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists n_\varepsilon$ 满足 $\sum_{k\ge n_\varepsilon}|I_k|<\varepsilon/5$，则

$$E-\cup_{1\le k\le n_\varepsilon} I_k \subset \cup_{k\ge n_\varepsilon+1} 5I_k,\qquad (*)$$

从而 $m^*(E-\cup_{1\le k\le n_\varepsilon} I_k)\le \sum_{k\ge n_\varepsilon}|5I_k|<\varepsilon$。

为证（*），$\forall x\in E-\cup_{1\le k\le n_\varepsilon} I_k$，因 $\cup_{1\le k\le n_\varepsilon} I_k$ 为闭集，故存在满足 $x\in I_x\in\mathscr{J}_{n_\varepsilon}$ 的区间 I_x，这个区间由于与 $\{I_k\}_{n_\varepsilon\ge k\ge 1}$ 都不相交，所以要么 $\in\{I_k\}_{k\ge n_\varepsilon+1}$，要么在第 k_x 次被扔掉了，而 k_x 必然 $k_x\ge n_\varepsilon+1$，所以 $I_x\subset 5I_{k_x}\subset\cup_{k\ge n_\varepsilon+1}5I_k$。证毕。

几乎处处可导性的证明概要：

(1). 简化：

设

$$E=\{x\in[a,b]:D^+f(x)>D_-f(x)\}$$

$$F=\{x\in[a,b]:D^-f(x)>D_+f(x)\},$$

则定理的证明归结为证明：上述 E、F 都是零测集。再注意到 $E=\cup_{r,s\in\mathbb{Q}_+}A_{r,s}$，其中

$$A_{r,s}=\{x\in[a,b]:D^+f(x)>r>s>D_-f(x)\},$$

因此，要证 E 为零测集只要证明每个 $A_{r,s}$ 都是零测集。对 F 也类似。下面证明 $A=A_{r,s}$ 为零测集。

证明 $A=A_{r,s}$ 为零测集的基本思路：

- 对任意 $\varepsilon>0$，先利用 A 中点满足 $D_-f(x)<s$，在 $[a,b]$ 中取一组互不相交的闭区间 $\{[x_k-h_k,x_k]\}_{1\le k\le p}$ 满足
$$\sum_{1\le k\le p}(f(x_k)-f(x_k-h_k))\le s\sum_{1\le k\le p}h_k\le s(m^*(A)+\varepsilon);$$
- 然后利用 A 中点满足 $D^+f(x)>r$，在 $\cup_{1\le k\le p}(x_k-h_k,x_k)$ 中取一列闭区间 $\{[\tilde{x}_k,\tilde{x}_k+\tilde{h}_k]\}_{1\le k\le q}$ 满足
$$\sum_{1\le k\le q}\left(f(\tilde{x}_k+\tilde{h}_k)-f(\tilde{x}_k)\right)\ge r\sum_{1\le k\le q}\tilde{h}_k\ge r(m^*(A)-2\varepsilon)。$$
- 由于 $\{[\tilde{x}_k,\tilde{x}_k+\tilde{h}_k]\}_{1\le k\le q}$ 区间都是 $\{[x_k-h_k,x_k]\}_{1\le k\le p}$ 的子区间，所以
$$\sum_{1\le k\le p}(f(x_k)-f(x_k-h_k))\ge\sum_{1\le k\le q}\left(f(\tilde{x}_k+\tilde{h}_k)-f(\tilde{x}_k)\right),$$
由此便得 $s(m^*(A)+\varepsilon)\ge r(m^*(A)-2\varepsilon)$。

(2). $A=A_{r,s}$ 为零测集：

➢ 对任意 $\varepsilon>0$，先取开集 $G\supset A$，使得 $m(G)<m^*(A)+\varepsilon$。$\forall x\in A$，由于 $s>D_-f(x)$，满足

$$\tfrac{f(x-h)-f(x)}{-h}<s \text{ 以及 } [x-h,x]\subset G$$

的 $h>0$ 全体 H_x 以 0 为聚点。所以

$$\{[x-h,x]\}_{h\in H_x,x\in A}$$

为 A 的一个 Vitali 覆盖。因此，存在互不相交的有限子族

$$\{[x_k-h_k,x_k]\}_{1\le k\le p}$$

满足：

a) $m^*(A-\cup_{1\le k\le p}[x_k-h_k,x_k])<\varepsilon$，从而
$m^*(A\cap\cup_{1\le k\le p}[x_k-h_k,x_k])>m^*(A)-\varepsilon$；

b) $\sum_{1\le k\le p}\left|[x_k-h_k,x_k]\right|\le m(G)<m^*(A)+\varepsilon$；

c) $\tfrac{f(x_k)-f(x_k-h_k)}{h_k}<s$。

所以，

$$\sum_{1\le k\le p}\left(f(x_k)-f(x_k-h_k)\right)\le s\sum_{1\le k\le p}h_k\le s(m^*(A)+\varepsilon)。\quad ....(*)$$

➢ 令 $B=A\cap\cup_{1\le k\le p}(x_k-h_k,x_k)$。$\forall x\in B$，由于 $D^+f(x)>r$，满足

$$\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h}>r \text{ 以及 } [x,x+h]\subset\cup_{1\le k\le p}(x_k-h_k,x_k)$$

的 $h>0$ 全体 $\tilde{H}_x$ 以 0 为聚点。所以

$$\{[x,x+h]\}_{h\in\tilde{H}_x,x\in B}$$

为 B 的一个 Vitali 覆盖。因此，存在互不相交的有限子族

$$\{[\tilde{x}_k,\tilde{x}_k+\tilde{h}_k]\}_{1\le k\le q}$$

满足：

a') $m^*(B-\cup_{1\le k\le q}[\tilde{x}_k,\tilde{x}_k+\tilde{h}_k])<\varepsilon$，从而

$$\sum_{1\le k\le q}\tilde{h}_k\ge m^*(B\cap\cup_{1\le k\le q}[\tilde{x}_k,\tilde{x}_k+\tilde{h}_k])>m^*(B)-\varepsilon$$

b') $\tfrac{f(\tilde{x}_k+\tilde{h}_k)-f(\tilde{x}_k)}{\tilde{h}_k}>r$。

所以，结合 a)式，我们得

$$\sum_{1\le k\le q}\left(f(\tilde{x}_k+\tilde{h}_k)-f(\tilde{x}_k)\right)$$

$$\ge r\sum_{1\le k\le q}\tilde{h}_k\ge r\left(m^*(B)-\varepsilon\right)>r\left(m^*(A)-2\varepsilon\right)。\quad ....(**)$$

➢ 根据 B 的 Vitali 覆盖的构造过程，我们知道：$\{[\tilde{x}_k, \tilde{x}_k+\tilde{h}_k]\}_{1\le k\le q}$ 中每个区间都在 $\{[x_k-h_k, x_k]\}_{1\le k\le p}$ 的某个区间内，因此根据 f 的单调性，我们有

$$\sum_{1\le k\le p}\left(f(x_k)-f(x_k-h_k)\right)\ge\sum_{1\le k\le q}\left(f(\tilde{x}_k+\tilde{h}_k)-f(\tilde{x}_k)\right)。$$

因此，根据**(*)**与**(**)**式，我们得

$$s(m^*(A)+\varepsilon)\ge r\left(m^*(A)-2\varepsilon\right)。$$

由 ε 的任意性得 $sm^*(A)\ge rm^*(A)$，而 $s<r$，所以 $m^*(A)=0$。证毕。

(3). $\int_{[a,b]} f'(x)dx\le f(b)-f(a)$。

令（注意：在下式中，约定 $f(x)=f(b)\ \ (\forall x>b)$）

$$f_n(x)=n\left(f(x+\tfrac{1}{n})-f(x)\right),$$

则 $f_n(x)\ge 0$，且根据单调函数的可微性定理，$\lim f_n(x)=f'(x)$ 几乎处处存在。于是由 Fatou 引理得

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f'(x)dx &\le \underline{\lim}\int_{[a,b]} f_n(x)dx=\underline{\lim}\int_{[a,b]} n\left(f(x+\tfrac{1}{n})-f(x)\right)dx\\ &=\underline{\lim}\left(n\int_{[b,b+1/n]} f(x)dx-n\int_{[a,a+1/n]} f(x)dx\right)\\ &=\underline{\lim}\left(f(b)-n\int_{[a,a+1/n]} f(x)dx\right)\le f(b)-f(a)\end{aligned}。$$

证毕。

Fubini 逐项微分定理证明概要:

设

$$S_n=\sum_{n\ge k\ge 1} f_k,\quad R_n=\sum_{k\ge n+1} f_k\ ,$$

则 f、S_n、R_n 都是单调上升的，从而都几乎处处可导，并且

$$f'(x)=S_n'(x)+R_n'(x),\quad R_n'(x)=f_{n+1}'(x)+R_{n+1}'(x),$$

从而 $\lim R_n'(x)$ 几乎处处收敛，故有

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}\lim_{n\to\infty} R_n'(x)dx &\le \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} R_n'(x)dx\quad (\text{由}Fatou\text{引理})\\ &\le \lim_{n\to\infty}\left(R_n(b)-R_n(a)\right)\quad (\text{由}Lebesgue\text{微分定理})\\ &=0\quad (\text{由}R_n(b)\text{、}R_n(a)\text{的收敛性})。\end{aligned}$$

因此，$\lim_{n\to\infty} R_n'(x)=0$ 几乎处处成立，即 $f'(x)\overset{a.e.}{=}\sum_{n\ge 1} f_n'(x)$。证毕。

“导数几乎处处为零的绝对连续函数必为常数”之证明：

思路（反证法）：

若不然，不妨设存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f(a)\neq f(c)$。令

$$E_c=\{x\in(a,c): f'(x)=0\},\quad \varepsilon_0=|f(a)-f(c)|/3\text{。}$$

我们要证明：对任意 $\delta>0$，存在 (a,b) 中的互不相交区间族 $\{[a_k,b_k]\}_{1\le k\le m_\delta}$，满足

$$\sum_{1\le k\le m_\delta}(b_k-a_k)<\delta\text{，但 }\sum_{1\le k\le m_\delta}|f(b_k)-f(a_k)|\ge\varepsilon_0\text{，}$$

这与绝对连续矛盾。所以，反设不对。

下面给出证明细节。

$\forall r>0$，满足：

- $[x,x+h]\subset(a,c)$
- $|f(x+h)-f(x)|/h\le r$

的 $h>0$ 全体记为 $\boldsymbol{H}_x>0$，则区间族 $\mathscr{I}_r=\{[x,h]\}_{h\in\boldsymbol{H}_x,x\in E_c}$ 为 E_c 的一个 Vitali 覆盖。从而对任意 $\delta>0$，存在有限子族 $\{[x_k,h_k]\}_{1\le k\le m_\delta}$ 使得

$$m\left(E_c-\cup_{1\le k\le m_\delta}[x_k,h_k]\right)<\delta$$

不妨设 $a=x_0<x_1<x_1+h_1<x_2<x_2+h_2<\cdots<x_{m_\delta}+h_{m_\delta}<x_{m_\delta+1}=c$，记

$$h_0=0,\quad \varepsilon_0=|f(a)-f(c)|/3\text{。}$$

则有

$$\begin{aligned}3\varepsilon_0=|f(a)-f(c)|&\le\sum_0^{m_\delta}|f(x_{k+1})-f(x_k+h_k)|+\sum_1^{m_\delta}|f(x_k+h_k)-f(x_k)|\\&\le\sum_0^{m_\delta}|f(x_{k+1})-f(x_k+h_k)|+r(c-a)\text{。}\end{aligned}$$

取 $r=\varepsilon_0/(c-a)$，则

$$\sum_{1\le k\le m_\delta}|f(x_{k+1})-f(x_k+h_k)|\ge 2\varepsilon_0\text{；}$$

而

$$\sum_{1\le k\le m_\delta}\big|[x_k+h_k,x_{k+1}]\big|=m\left(E_c-\cup_{1\le k\le m_\delta}[x_k,h_k]\right)<\delta\text{。}$$

这与 f 的绝对连续性相矛盾。证毕。